

第5讲 动态利率期限结构模型

陈蓉 教授、博导
厦门大学财务学系
厦门大学金融工程研究中心

[http:// aronge.net](http://aronge.net)
aronge@xmu.edu.cn



1.

动态利率模型综述

动态利率模型与静态利率模型

* 建模目的

- * 静态：拟合当前时点利率期限结构
- * 动态：刻画利率期限结构的未来分布，为衍生品定价

* 建模重点

- * 静态：高拟合度、曲线的平滑、拟合灵活度和稳定度
- * 动态：经济意义，基于内在经济原理设定，例如均衡模型和无套利模型

* 复杂性和信息含量

* 估计参数需要的数据：当前债券价格/衍生品价格

实用主义标准

1. 是否会出现负的名义利率
2. 是否能够较好地捕捉现实市场中灵活多变的收益率曲线形状，以及刻画利率期限结构的其他静态特征，如曲线末端通常趋于水平等。
3. 模型是否能够反映现实市场中观察到的利率动态特征：
 - ① 利率的均值回归特征
 - ② 利率的基本分布特征：肥尾和非对称分布
 - ③ 利率期限结构长短端变动不一致
 - ④ 利率波动率特征：与利率水平有关；利率的波动率期限结构常常呈现出下降或是驼峰状的形态；动态利率模型隐含的利率波动率曲线是否与衍生品市场价格吻合

动态利率模型分类

- * 绝对定价模型（均衡）与相对定价（无套利）模型
- * 时间齐次和时间非齐次
- * 单因子模型与多因子模型
- * 连续模型与带跳模型
- * 扩散过程与非扩散过程
- * 仿射模型与非仿射模型

均衡模型与无套利模型

* 无套利模型：贴近市场

- * 不解释利率曲线均衡水平是如何形成的，直接以市场数据（如利率曲线、利率产品价格等）作为模型输入，基于无套利条件建立模型。

* 均衡模型：注重经济逻辑

- * 对所有市场参与者的偏好和禀赋进行显性假设，通过债券的供需均衡确定债券价格和利率水平；
- * 用一些基于偏好的基本假设通常是可能对这些模型的假设进行检验的，因而这些模型的假设是和市场均衡兼容的

扩散模型

- * 所有相关的价格和变量都是一个有限维的状态变量的函数，而这个状态变量遵循一个马尔可夫扩散过程
- * 单因子/多因子扩散过程
- * 时间齐次/时间非齐次扩散过程
- * 时间齐次模型又可以分为仿射模型和非仿射扩散过程

2.

均衡模型

均衡模型

* 均衡模型—时间齐次&连续过程—扩散过程—仿射模型

单因子时间齐次扩散过程

* 绝对漂移率和绝对波动率都是瞬时利率的确定性函数

$$dr_t = \mu_r(r_t)dt + \sigma_r(r_t)dz_t$$

* 如果风险价格也是瞬时利率的时间齐次确定性函数，则瞬时利率在风险中性测度下也服从单因子时间齐次扩散过程

单因子时间齐次仿射模型

* 绝对漂移率和绝对方差都是瞬时利率的确定性仿射函数

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sqrt{\omega_0 + \omega_1 r_t} dz_t$$

* 如果风险价格设定得当，则瞬时利率在风险中性测度下也服从单因子时间齐次仿射函数

$$\begin{aligned} dr_t &= \left[\kappa(\varphi - r_t) - \lambda_t \sqrt{\omega_0 + \omega_1 r_t} \right] dt + \sqrt{\omega_0 + \omega_1 r_t} d\tilde{z}_t \\ &= \tilde{\kappa}(\tilde{\theta} - r_t) dt + \sqrt{\omega_0 + \omega_1 r_t} d\tilde{z}_t \end{aligned}$$

单因子时间齐次仿射模型下的零息债价值

* Duffie and Kan (1996)：零息债价值是瞬时利率的指数仿射函数

$$B_t^T = e^{-\alpha(t,T) - \beta(t,T)r_t}$$
$$\begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial (T-t)} + \beta \tilde{\kappa} + \frac{1}{2} \beta^2 \omega_1 - 1 = 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial (T-t)} - \beta \tilde{\kappa} \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} \beta^2 \omega_0 = 0 \\ \alpha(T, T) = \beta(T, T) = 0 \end{cases}$$

证明：如果第一式成立

* 根据Ito引理

$$\begin{aligned}\frac{dB}{B_t^T} &= \left[\frac{\partial B}{\partial t} \frac{1}{B_t^T} + \frac{\partial B}{\partial r} \frac{1}{B_t^T} \tilde{\kappa} (\tilde{\theta} - r_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \frac{1}{B_t^T} (\omega_0 + \omega_1 r_t) \right] dt + \frac{\partial B}{\partial r} \frac{1}{B_t^T} \sqrt{\omega_0 + \omega_1 r_t} d\tilde{z}_t \\ &= \left[-\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial t} r_t - \beta \tilde{\kappa} (\tilde{\theta} - r_t) + \frac{1}{2} \beta^2 (\omega_0 + \omega_1 r_t) \right] dt - \beta \sqrt{\omega_0 + \omega_1 r_t} d\tilde{z}_t\end{aligned}$$

* 在风险中性测度下，零息债价格漂移率应为r

* 到期回报（边界条件）

$$B_T^T = 1$$

-
- * 这样，我们就将零息债价值公式的求解转化为了一组常微分方程的求解。
 - * 进一步还需证明如果瞬时利率服从单因子时间齐次仿射模型，零息债价值只可能是如上的指数仿射形式。

单因子时间齐次仿射模型下的即期利率

$$R_t^T = \frac{\alpha(t, T)}{T - t} + \frac{\beta(t, T)}{T - t} r_t$$

- * $\alpha(t, T)$ 与 $\beta(t, T)$ 、零息债价值和即期利率实际上与具体时刻 t 无关，而只与剩余期限有关
- * 合理模型中的 $\beta(t, T)$ 应为正数，且 $\frac{\beta(t, T)}{T - t}$ 不应为常数

单因子时间齐次仿射模型下的零息债欧式期权价值

* 一个 T 时刻到期的欧式期权，标的为 T^* 时刻到期的零息债，行权价为 K

$$c_t^{K,T,T^*} = B_t^{T^*} \mathbb{Q}_t^{\mathbb{T}^*} \left[B_T^{T^*} > K \right] - K B_t^T \mathbb{Q}_t^{\mathbb{T}} \left[B_T^{T^*} > K \right]$$
$$c_t^{K,T,T^*} = B_t^{T^*} \mathbb{Q}_t^{\mathbb{T}^*} \left[r_T < -\frac{\alpha(T, T^*)}{\beta(T, T^*)} - \frac{\ln K}{\beta(T, T^*)} \right]$$
$$- K B_t^T \mathbb{Q}_t^{\mathbb{T}} \left[r_T < -\frac{\alpha(T, T^*)}{\beta(T, T^*)} - \frac{\ln K}{\beta(T, T^*)} \right]$$

* 如果假设到期零息债价格服从对数正态分布

$$c_t^{K,T,T^*} = B_t^{T^*} N(d_1) - KB_t^T N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{B_t^{T^*}}{KB_t^T}\right) + \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_F\sqrt{T-t}$$

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{\text{VAR}\left(\ln F_T^{T,T^*}\right)}{T-t}}$$

$$\text{VAR}\left[\ln F_T^{T,T^*}\right] = (\omega_0 + \omega_1 r_t) \int_t^T \left[\beta(s, T^*) - \beta(s, T)\right]^2 ds$$

单因子时间齐次仿射模型

- * 瞬时利率的绝对漂移率和绝对方差率都是瞬时利率的仿射函数，相应地零息债价值和即期利率分别是瞬时利率的指数仿射函数和仿射函数
- * 仿射模型的最大优点就是数学上易于求解。时间齐次则意味着利率和利率敏感性资产的价值与当前处于哪一时刻并无关系，而只与剩余期限有关。
- * 但上述公式仅给出了单因子时间齐次仿射模型的一般形式，参数设定不同，就得到不同模型

Merton(1973)模型

- * 瞬时利率：风险中性测度下服从普通布朗运动

$$dr_t = \tilde{\mu}dt + \sigma d\tilde{z}_t$$

- * 零息债价格：剩余期限的函数

$$B_t^T = e^{-\alpha(t,T) - \beta(t,T)r_t}$$

$$\alpha(t,T) = \frac{1}{2}\tilde{\mu}(T-t)^2 - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3, \beta(t,T) = T-t > 0$$

- * 即期利率：剩余期限的函数

$$R_t^T = r_t + \frac{1}{2}\tilde{\mu}(T-t) - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^2$$

Merton模型的优点

- * 首次将随机分析引入利率领域
- * 对Merton模型的拓展产生了后续的众多动态利率模型

Merton模型的缺陷

- * 正态分布：可能出现负利率
- * 利率期限结构静态特征
 - * 长期利率 R_t^∞ 趋于 $-\infty$
 - * 只能刻画开口向下的抛物线形状
- * 利率期限结构动态特征
 - * 不存在均值回归特征：当 s 趋于无穷时，未来即期利率的均值和方差都将趋于无穷大
 - * 瞬时利率变动时，整个利率期限结构只会平移 $\frac{\beta(t,T)}{T-t} = 1$
 - * 利率波动率特征不符合现实：波动率为常数，与剩余期限和利率水平无关
 - * 单因子：所有期限的即期利率的瞬时变动是完全正相关的

Vasicek(1977)模型

- * 瞬时利率：现实测度下服从均值回复 (O-U) 模型

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dz_t$$

- * 其中参数均需为大于零的常数
- * 若假设风险价格也是瞬时利率的某种仿射函数，则瞬时利率在风险中性测度下也会服从类似的O-U过程（参数仍需为大于零的常数）

$$\begin{aligned} dr_t &= [\kappa(\theta - r_t) - \lambda_t \sigma]dt + \sigma d\tilde{z}_t \\ &= \tilde{\kappa}(\tilde{\theta} - r_t)dt + \sigma d\tilde{z}_t \end{aligned}$$

Vasicek模型下的零息债价值与利率期限结构

- * 零息债价值和即期利率仍然分别是瞬时利率的指数仿射函数和仿射函数

$$B_t^T = e^{-\alpha(t,T) - \beta(t,T)r_t}$$

$$R_t^T = \frac{\alpha(t,T)}{T-t} + \frac{\beta(t,T)}{T-t} r_t$$

$$\beta(t,T) = \frac{1}{\tilde{\kappa}} [1 - e^{-\tilde{\kappa}(T-t)}]$$

$$\alpha(t,T) = \left(\tilde{\theta} - \frac{\sigma^2}{2\tilde{\kappa}^2} \right) [(T-t) - \beta(t,T)] + \frac{\sigma^2}{4\tilde{\kappa}} \beta(t,T)^2$$

Vasicek模型下的零息债欧式期权价值

* 如果在风险中性测度下仍然服从Vasicek模型

$$r_T = e^{-\tilde{\kappa}(T-t)} r_t + \tilde{\theta} \left(1 - e^{-\tilde{\kappa}(T-t)}\right) + \int_t^T \sigma e^{-\tilde{\kappa}(T-s)} d\tilde{z}_s$$

* 说明到期瞬时利率服从正态分布，零息债价值服从对数正态分布，可以套用Black模型

$$\begin{aligned} c_t^{K,T,T^*} &= B_t^{T^*} N(d_1) - K B_t^T N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{B_t^{T^*}}{K B_t^T}\right) + \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t)}{\sigma_F \sqrt{T-t}}, d_2 = d_1 - \sigma_F \sqrt{T-t} \\ \sigma_F^2 (T-t) &= \mathbb{V}\mathbb{A}\mathbb{R}\left[\ln F_T^{T,T^*}\right] = \frac{\sigma^2 (1 - e^{-2\tilde{\kappa}(T-t)})}{2\tilde{\kappa}} \beta^2(T, T^*), \\ \beta(T, T^*) &= \frac{1}{\tilde{\kappa}} \left(1 - e^{-\tilde{\kappa}(T^*-T)}\right) \end{aligned}$$

Vasicek模型的改进

1. 均值回归特性

- ① 直观可见均值回复特性
- ② 现实测度下有

$$r_T = e^{-\kappa(T-t)}r_t + \theta(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \int_t^T \sigma e^{-\kappa(T-s)} dz_s$$

$$\mathbb{E}_t(r_T) = \theta + (r_t - \theta)e^{-\kappa(T-t)}$$

$$\text{VAR}_t[r_T] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)})$$

- * $T \rightarrow \infty$ 时, r_t 条件均值有界 (θ), 说明 θ 是 r_t 长期均值
- * $\kappa \rightarrow \infty$ 时, r_t 条件均值趋于 θ , 条件方差趋于0
- * $\kappa \rightarrow 0$ 时, r_t 均值趋于当前 r_t , 说明 κ 是均值回归速度

2. 利率期限结构的静态特征

- ① 长期利率 R_t^∞ 收敛于 $\tilde{\theta} - \frac{\sigma^2}{2\tilde{\kappa}^2}$
- ② 参数取值不同，得到不同的即期利率期限结构形状(上升、下降和先升后降)

$$R_t^T = \frac{\alpha(t, T)}{T-t} + \frac{\beta(t, T)}{T-t} r_t$$

$$\beta(t, T) = \frac{1}{\tilde{\kappa}} [1 - e^{-\tilde{\kappa}(T-t)}] > 0$$

$$\alpha(t, T) = \left(\tilde{\mu} - \frac{\sigma^2}{2\tilde{\kappa}^2} \right) [(T-t) - \beta(t, T)] + \frac{\sigma^2}{4\tilde{\kappa}} \beta(t, T)^2$$

3. 利率期限结构的动态特征

- ① 瞬时利率变动时，不同期限的即期利率的变化同向但幅度不同，且短期变化幅度较大（ $\frac{\beta(t,T)}{T-t}$ 非常数）

- ② 短期利率波动率大于长期利率波动率

$$R_t^T = \frac{\alpha(t,T)}{T-t} + \frac{\beta(t,T)}{T-t} r_t$$

$$\beta(t,T) = \frac{1}{\tilde{\kappa}} [1 - e^{-\tilde{\kappa}(T-t)}] > 0$$

$$\alpha(t,T) = \left(\tilde{\mu} - \frac{\sigma^2}{2\tilde{\kappa}^2} \right) [(T-t) - \beta(t,T)] + \frac{\sigma^2}{4\tilde{\kappa}} \beta(t,T)^2$$

$$\text{VAR}_t(R_t^T) = \frac{\beta^2(t,T)}{(T-t)^2} \text{VAR}_t(r_T) = \frac{\sigma^2 (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) (1 - e^{-\tilde{\kappa}(T-t)})^2}{2\kappa\tilde{\kappa}^2 (T-t)^2}$$

$$\frac{\partial \text{VAR}_t(R_t^T)}{\partial (T-t)} < 0$$

Vasicek模型的缺陷

1. 正态分布：仍有可能出现负利率
2. 静态特征
 - ① 长期利率应该是时变的，而非一个常数
 - ② 利率期限结构形状不够丰富
3. 动态特征
 - ① 无法刻画驼峰状的利率波动率
 - ② 利率波动率与利率水平无关
4. 单因子设定导致模型导出的债券价格相关性过高

Cox, Ingersoll and Ross (1985)模型

- * 瞬时利率：现实测度下服从均值回复平方根模型

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dz_t$$

其中参数均需为大于零的常数，且 $2\kappa\theta > \sigma^2$

- * 若假设风险价格满足特定形式（如 $\lambda_t = b\sqrt{r_t}$ ），则瞬时利率在风险中性测度下仍会服从CIR过程（参数条件同上）

$$dr_t = \tilde{\kappa}(\tilde{\theta} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\tilde{z}_t$$

CIR模型下的零息债价值与利率期限结构

- * 零息债价值和即期利率仍然分别是瞬时利率的指数仿射函数和仿射函数

$$B_t^T = e^{-\alpha(t,T) - \beta(t,T)r_t}$$

$$R_t^T = \frac{\alpha(t,T)}{T-t} + \frac{\beta(t,T)}{T-t} r_t$$

$$\beta(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(t,T)} - 1)}{(\gamma + \tilde{\kappa})(e^{\gamma(t,T)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\alpha(t,T) = -\frac{2\tilde{\kappa}\tilde{\theta}}{\sigma^2} \left\{ \ln(2\gamma) + \frac{1}{2}(\gamma + \tilde{\kappa})(T-t) - \ln \left[(\gamma + \tilde{\kappa})(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma \right] \right\}$$

$$\gamma = \sqrt{\tilde{\kappa}^2 + 2\sigma^2}$$

CIR模型下的零息债欧式期权价值

* 如果在风险中性测度下仍然服从CIR模型

$$r_T = e^{-\tilde{\kappa}(T-t)} r_t + \tilde{\theta} \left(1 - e^{-\tilde{\kappa}(T-t)}\right) + \int_t^T \sigma e^{-\tilde{\kappa}(T-s)} \sqrt{r_s} d\tilde{z}_s$$

* 说明到期瞬时利率服从非中心卡方分布，无法继续套用Black模型

$$c_t^{K,T,T^*} = B_t^{T^*} \chi^2 \left\{ 2\Gamma \left[\xi + \psi + \beta(T, T^*) \right]; \frac{4\tilde{\kappa}\tilde{\theta}}{\sigma^2}, \frac{2\xi^2 r_t e^{\gamma(T-t)}}{\xi + \psi + \beta(T, T^*)} \right\} \\ - KB_t^T \chi^2 \left\{ 2\Gamma(\xi + \psi); \frac{4\tilde{\kappa}\tilde{\theta}}{\sigma^2}, \frac{2\xi^2 r_t e^{\gamma(T-t)}}{\xi + \psi} \right\} \\ \xi = \frac{2\gamma}{\sigma^2 (e^{\gamma(T-t)} - 1)}, \psi = \frac{\tilde{\kappa} + \gamma}{\sigma^2}, \Gamma = \frac{-\alpha(T, T^*) - \ln K}{\beta(T, T^*)}$$

CIR模型：保留Vasicek模型的优点

1. 均值回归特性

- ① 直观可见均值回复特性
- ② 现实测度下有

$$r_T = e^{-\kappa(T-t)} r_t + \theta \left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) + \int_t^T \sigma e^{-\kappa(T-s)} \sqrt{r_s} dz$$

$$\mathbb{E}_t(r_T) = \theta + (r_t - \theta) e^{-\kappa(T-t)}$$

$$\text{VAR}_t(r_T) = r_t \frac{\sigma^2}{\kappa} \left[e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)} \right] + \theta \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left[1 - e^{-\kappa(T-t)} \right]^2$$

- * $T \rightarrow \infty$ 时, r_t 条件均值有界 (θ), 说明 θ 是 r_t 长期均值
- * $\kappa \rightarrow \infty$ 时, r_t 条件均值趋于 θ , 条件方差趋于0
- * $\kappa \rightarrow 0$ 时, r_t 均值趋于当前 r_t , 说明 κ 是均值回归速度

2. 利率期限结构的静态特征

- ① 长期利率 R_t^∞ 收敛于 $\frac{2\tilde{\kappa}\tilde{\theta}}{\tilde{\kappa} + \gamma}$
- ② 参数取值不同, 得到不同的即期利率期限结构形状(上升、下降和先升后降)

$$R_t^T = \frac{\alpha(t, T)}{T-t} + \frac{\beta(t, T)}{T-t} r_t$$

$$\beta(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(t, T)} - 1)}{(\gamma + \tilde{\kappa})(e^{\gamma(t, T)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\alpha(t, T) = -\frac{2\tilde{\kappa}\tilde{\theta}}{\sigma^2} \left\{ \ln(2\gamma) + \frac{1}{2}(\gamma + \tilde{\kappa})(T-t) - \ln \left[(\gamma + \tilde{\kappa})(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma \right] \right\}$$

$$\gamma = \sqrt{\tilde{\kappa}^2 + 2\sigma^2}$$

3. 利率期限结构的动态特征

- ① 瞬时利率变动时，不同期限的即期利率的变化同向但幅度不同，且短期变化幅度较大（ $\frac{\beta(t,T)}{T-t}$ 非常数）
- ② 短期利率波动率大于长期利率波动率

$$\text{VAR}_t(R_t^T) = \frac{\beta^2(t, T)}{(T-t)^2} \text{VAR}_t(r_T)$$
$$\frac{\partial \text{VAR}_t(R_t^T)}{\partial (T-t)} < 0$$

CIR模型的改进

1. 通过非中心卡方分布的设定和对参数的约束避免了负利率的可能。
2. 将瞬时利率的平方根引入波动项，改进了Vasicek模型下波动率与利率水平无关的缺陷。在CIR模型下，瞬时利率与即期利率的方差均与瞬时利率水平正相关，这与现实是相符的。

CIR模型的缺陷

1. 静态特征

- ① 长期利率仍然不是时变的数
- ② 利率期限结构形状依然不够丰富

2. 动态特征

- ① 无法刻画驼峰状的利率波动率

3. 单因子设定依然导致模型导出的债券价格相关性过高

多因子模型

- * 利率期限结构的静态形状不够丰富
- * 即期利率变化完全正相关（同一个风险源），无法刻画twisted变化
- * 主成分分析表明，几乎所有市场的无风险利率曲线都至少受到2-3个不相关重要因素的影响
- * 只有在待定价证券与用于校准参数的证券非常相似的情况下，用单因子模型定价才是比较可信的；如果待定价证券与用于校准参数的证券特征不一致，多因子模型的定价结果往往更为可靠

多因子时间齐次仿射模型的基本形式

* 瞬时利率是状态向量的仿射函数，状态向量的漂移率和方差率也是状态向量的仿射函数

$$r_t = \xi_0 + \boldsymbol{\xi}' \mathbf{x}_t = \xi_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i x_{it}$$
$$d\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\phi}} - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{x}_t \\ n \times 1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma} \sqrt{\mathbf{v}(\mathbf{x}_t)} d\tilde{\mathbf{Z}}_t \\ n \times n \quad n \times n \quad n \times 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_t) = \begin{pmatrix} v_1 + \mathbf{v}'_1 \mathbf{x}_t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 + \mathbf{v}'_2 \mathbf{x}_t & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_n + \mathbf{v}'_n \mathbf{x}_t \end{pmatrix}$$
$$\sqrt{\mathbf{v}(\mathbf{x}_t)} = \begin{pmatrix} \sqrt{v_1 + \mathbf{v}'_1 \mathbf{x}_t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{v_2 + \mathbf{v}'_2 \mathbf{x}_t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{v_n + \mathbf{v}'_n \mathbf{x}_t} \end{pmatrix}$$

更易理解的形式

* 对于所有的j, $v_j + \mathbf{v}_j' \mathbf{x}_t \geq 0$

$$r_t = \xi_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i x_{it}$$

$$dx_{it} = \left(\tilde{\varphi}_i - \sum_{j=1}^n \tilde{\kappa}_{ij} x_{jt} \right) dt + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij} \sqrt{v_j + \mathbf{v}_j' \mathbf{x}_t} d\tilde{z}_{jt}$$

多因子时间齐次仿射模型下的零息债价值与即期利率期限结构

* 零息票债券的价格：状态变量的指数仿射函数

* 即期利率和瞬时远期利率：状态价格的仿射函数

$$B_t^T = e^{-\alpha(t,T) - \underset{1 \times n}{\boldsymbol{\beta}(t,T)}' \underset{n \times 1}{\mathbf{x}_t}} = e^{-\alpha(t,T) - \sum_{j=1}^n \beta_j(t,T) x_{jt}}, R_t^T = \frac{\alpha(t,T)}{T-t} + \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j(t,T)}{T-t} x_j$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial (T-t)} = -\underset{n \times n}{\tilde{\mathbf{K}}}' \underset{n \times 1}{\boldsymbol{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\underset{n \times n}{\boldsymbol{\Gamma}}' \underset{n \times 1}{\boldsymbol{\beta}} \right)_i \underset{n \times 1}{\mathbf{v}_i} + \underset{n \times 1}{\boldsymbol{\xi}} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial (T-t)} = \underset{1 \times n}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}}' \underset{n \times 1}{\boldsymbol{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\underset{n \times n}{\boldsymbol{\Gamma}}' \underset{n \times 1}{\boldsymbol{\beta}} \right)_i v_i + \xi_0 \\ \frac{\partial \beta_i}{\partial (T-t)} = -\sum_{j=1}^n \tilde{\kappa}_{ji} \beta_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n v_{ki} \sum_{j=1}^n \left(\Gamma_{jk} \beta_j \right)^2 + \xi_i \\ \frac{\partial \alpha}{\partial (T-t)} = \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_j \beta_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n v_k \sum_{j=1}^n \left(\Gamma_{jk} \beta_j \right)^2 + \xi_0 \end{array} \right. \quad \text{或}$$
$$\alpha(T,T) = \beta_j(T,T) = 0, j = 1, 2, \dots, n$$

多因子时间齐次仿射模型下的欧式期权定价

* 零息债欧式看涨期权定价公式

$$c_t^{K,T,T^*} = B_t^{T^*} \mathbb{Q}_t^{\mathbb{T}^*} \left[B_T^{T^*} > K \right] - K B_t^T \mathbb{Q}_t^{\mathbb{T}} \left[B_T^{T^*} > K \right]$$

- * 意味着要为零息债欧式期权定价，需要因子某种线性组合之和在两个远期测度下的分布。在一定设定下，一些多因子模型也可获得期权的解析解。

n因子时间齐次仿射模型的分类

- * 因子数量/分布特征
- * Dai and Singleton(2000)：n因子仿射模型分为n+1类，下标表示影响波动率中的 $v(\mathbf{x}_t)$ 、进而影响瞬时方差协方差矩阵 $\mathbb{V}_{\mathbb{A}\mathbb{R}_t}[\mathbf{d}\mathbf{x}_t]$ 的因子数量

$$\mathbb{A}_0(n), \mathbb{A}_1(n), \dots, \mathbb{A}_n(n)$$

Dai and Singleton(2000)发现, 要使得 $v_i + \mathbf{v}_i' \mathbf{x}_t > 0$ 始终成立, 则所有对瞬时方差有影响

的因子 x_i 都应满足以下条件:

(1) 其漂移率中的 $\tilde{\varphi}_i \geq 0$, 而且在均值回复速度向量 $\tilde{\mathbf{\kappa}}_i$ 中, 其他会影响瞬时方差的因子的系数应小于等于零, 不影响瞬时方差因子的系数应等于零, 即

$$\tilde{\kappa}_{ij} \leq 0, j = 1, \dots, m, j \neq i, \tilde{\kappa}_{ij} = 0, j = m + 1, \dots, n ;$$

(2) 只对第 i 个风险源 $d\tilde{z}_{it}$ 敏感, 且波动率与自身开方 $\sqrt{x_{it}}$ 成比例。

这两个条件意味着, 所有对瞬时方差有影响的因子是瞬时不相关的, 但可能因为漂移项中均值回复速度系数的影响而存在一定的正相关性, 而且这些因子与那些不影响瞬时方差的因子无关。

对于那些不影响瞬时方差的因子, 它们的漂移率则没有限制; 它们对来自前 m 个风险源的敏感性只能与前 m 个因子的开方 (即 $\sqrt{x_{it}}, i = 1, \dots, m$) 成比例, 对其他风险源的敏感

性则为 $\Gamma_{ij} \sqrt{v_j + \sum_{k=1}^m v_{jk} x_{kt}} \quad (v_j, v_{kj} \geq 0)$ 。

Dai and Singleton (2000)分类的意义

- * 现有文献和实际中使用的多因子仿射模型都是上述分类的一些特例
- * 更重要的是，Dai and Singleton(2000)的上述讨论明确了多因子仿射模型中的合理参数约束，这使得我们能够更为灵活和准确地构建和使用多因子仿射模型。

多因子高斯模型

$$\mathbb{A}_0(n)$$

- * n 维o-u过程，所有的因子都服从条件正态分布。作为因子的仿射函数，瞬时利率也服从条件正态分布

$$d\mathbf{x}_t = \left(\underset{n \times 1}{\boldsymbol{\varphi}} - \underset{n \times n}{\mathbf{K}} \underset{n \times 1}{\mathbf{x}_t} \right) dt + \underset{n \times n}{\boldsymbol{\Gamma}} \underset{n \times 1}{d\mathbf{z}_t}$$

- * 高斯模型的最大优点是很多利率产品都有解析解
- * 在多因子高斯模型中，由于没有因子影响瞬时方差，因子之间是瞬时不相关的，但这并不意味着因子之间是不相关的，因为因子在漂移率中仍然存在相关性。

两因子Vasicek模型

* Beaglehole and Tenney (1991)

* Hull and White(1994)

$$dr_t = (\tilde{\varphi}_0 + \varphi_t - \tilde{\kappa}_r r_t)dt + \sigma_r d\tilde{z}_{1t}$$

$$d\varphi_t = -\tilde{\kappa}_\varphi \varphi_t dt + \sigma_\varphi \rho d\tilde{z}_{1t} + \sigma_\varphi \sqrt{1-\rho^2} d\tilde{z}_{2t}$$

$$r_t = 1 \cdot r_t + 0 \cdot \varphi_t$$

$$\begin{pmatrix} dr_t \\ d\varphi_t \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_r & -1_r \\ 0 & \tilde{\kappa}_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_t \\ \varphi_t \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ \sigma_\varphi \rho & \sigma_\varphi \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{z}_{1t} \\ d\tilde{z}_{2t} \end{pmatrix}$$

* 两个因子分别为瞬时利率本身和长期均值中的随机，可以理解为短期因素和长期因素

* 利率曲线形状、动态变化、波动率特征都更丰富

两因子Vasicek模型下的零息债价值和即期利率

$$B_t^T = e^{-\alpha(t,T) - \beta_1(t,T)r_t - \beta_2(t,T)\varphi_t}$$

$$R_t^T = \alpha(t,T) + \beta_1(t,T)r_t + \beta_2(t,T)\varphi_t$$

$$\beta_1(t,T) = \frac{1}{\tilde{\kappa}_r} \left(1 - e^{-\tilde{\kappa}_r(T-t)} \right)$$

$$\beta_2(t,T) = \frac{1}{\tilde{\kappa}_r - \tilde{\kappa}_\varphi} \left(\frac{1}{\tilde{\kappa}_\varphi} \left(1 - e^{-\tilde{\kappa}_\varphi(T-t)} \right) - \frac{1}{\tilde{\kappa}_r} \left(1 - e^{-\tilde{\kappa}_r(T-t)} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t,T) = & \frac{\tilde{\varphi}_0}{\tilde{\kappa}_r} \left((T-t) - \beta_1 \right) - \frac{1}{2\tilde{\kappa}_r^2} \left(\sigma_r^2 - \frac{2\rho\sigma_r\sigma_\varphi}{\tilde{\kappa}_r - \tilde{\kappa}_\varphi} + \frac{\sigma_\varphi^2}{(\tilde{\kappa}_r - \tilde{\kappa}_\varphi)^2} \right) \left((T-t) - \beta_1 - \frac{\tilde{\kappa}_r}{2}\beta_1^2 \right) \\ & - \frac{\sigma_\varphi^2}{2\tilde{\kappa}_\varphi^2(\tilde{\kappa}_r - \tilde{\kappa}_\varphi)^2} \left((T-t) - \frac{1}{\tilde{\kappa}_\varphi} \left(1 - e^{-\tilde{\kappa}_\varphi(T-t)} \right) - \frac{1}{2\tilde{\kappa}_\varphi} \left(1 - e^{-\tilde{\kappa}_\varphi(T-t)} \right)^2 \right) \\ & + \frac{1}{\tilde{\kappa}_r\tilde{\kappa}_\varphi(\tilde{\kappa}_r - \tilde{\kappa}_\varphi)} \left(\frac{\sigma_\varphi^2}{\tilde{\kappa}_r - \tilde{\kappa}_\varphi} - \rho\sigma_r\sigma_\varphi \right) \left((T-t) - \beta_1 - \frac{1}{\tilde{\kappa}_\varphi} \left(1 - e^{-\tilde{\kappa}_\varphi(T-t)} \right) + \frac{1}{\tilde{\kappa}_r + \tilde{\kappa}_\varphi} \left(1 - e^{-(\tilde{\kappa}_r + \tilde{\kappa}_\varphi)(T-t)} \right) \right) \end{aligned}$$

* 在两因子Vasicek模型下，由于两个因子都服从正态分布，零息债服从对数正态分布。因此Black模型依然可用。

$$c_t^{K,T,T^*} = B_t^{T^*} N(d_1) - KB_t^T N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{B_t^{T^*}}{KB_t^T}\right) + \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}} \quad d_2 = d_1 - \sigma_F\sqrt{T-t}$$

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{\text{VAR}\left(\ln F_T^{T,T^*}\right)}{T-t}}$$

$$\text{VAR}\left[\ln F_T^{T,T^*}\right] = \int_t^T \left\{ \sigma_r^2 \left[\beta_1(s, T^*) - \beta_1(s, T) \right]^2 + \sigma_\varphi^2 \left[\beta_2(s, T^*) - \beta_2(s, T) \right]^2 + 2\rho\sigma_r\sigma_\varphi \left[\beta_1(s, T^*) - \beta_1(s, T) \right] \left[\beta_2(s, T^*) - \beta_2(s, T) \right] \right\} ds$$

关于两因子Vasicek模型

- * 多因子拟合能力的提高是以模型结构的急剧复杂化为代价的，提高了参数估计与校准的难度
- * 由于仍然是时间齐次高斯模型，两因子Vasicek模型并不能杜绝负利率的可能，其长端利率仍然不是时变的，利率波动率也仍然与利率水平无关。

$A_n(n)$ 类模型

* 所有的因子都影响方差,

$$dx_{it} = \left(\tilde{\varphi}_i - \sum_{j=1}^n \tilde{\kappa}_{ij} x_{jt} \right) dt + \Gamma_i \sqrt{x_{it}} d\tilde{z}_{it}$$

$$\varphi_i > 0, \kappa_{ij} \leq 0, \text{ for } j \neq i$$

- * 如果对参数之间的关系施加类似CIR模型的设定, 使得瞬时利率不会出现负值, 就成为多因子的CIR模型
- * 如果假设系数矩阵 是对角阵, 就是单因子CIR模型的简单拓展, 零息债、即期利率和零息~~债~~欧式期权等都有解析解。

Longstaff-Schwartz (1992)模型

- * 假设一个状态变量只影响生产性投资的预期收益率，另一个状态变量则同时影响生产性投资的预期收益率和收益率方差，且这两个状态变量彼此之间是独立的

- * 风险中性测度
$$dx_{1t} = (\varphi_1 - \kappa_1 x_{1t}) dt + \sigma_1 \sqrt{x_{1t}} dz_{1t}$$
$$dx_{2t} = (\varphi_2 - \kappa_2 x_{2t}) dt + \sigma_2 \sqrt{x_{2t}} dz_{2t}$$
$$\lambda_1(\mathbf{x}_t, t) = 0, \lambda_2(\mathbf{x}_t, t) = \frac{\lambda}{\sigma_2} \sqrt{x_2}$$
$$dx_{1t} = (\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\kappa}_1 x_{1t}) dt + \sigma_1 \sqrt{x_{1t}} d\tilde{z}_{1t}$$
$$dx_{2t} = (\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\kappa}_2 x_{2t}) dt + \sigma_2 \sqrt{x_{2t}} d\tilde{z}_{2t}$$
$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1, \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2, \tilde{\kappa}_1 = \kappa_1, \tilde{\kappa}_2 = \kappa_2 + \lambda$$

-
- * 在一定的偏好、禀赋、技术等の設定下，对两个状态变量进行合理的缩放之后，均衡条件下的瞬时利率刚好等于这两个状态变量之和

$$dr_t = dx_1 + dx_2$$

$$= (\varphi_1 + \varphi_2 - \kappa_1 x_{1t} - \kappa_2 x_{2t}) dt + \sigma_1 \sqrt{x_{1t}} dz_{1t} + \sigma_2 \sqrt{x_{2t}} dz_{2t}$$

$$\text{Var}_t(dr_t) = \sigma_1^2 x_{1t} + \sigma_2^2 x_{2t}$$

$$dv_t = \sigma_1^2 dx_1 + \sigma_2^2 dx_2$$

$$= (\sigma_1^2 \varphi_1 + \sigma_2^2 \varphi_2 - \sigma_1^2 \kappa_1 x_{1t} - \sigma_2^2 \kappa_2 x_{2t}) dt + \sigma_1^3 \sqrt{x_{1t}} dz_{1t} + \sigma_2^3 \sqrt{x_{2t}} dz_{2t}$$

$$x_{1t} = \frac{\sigma_2^2 r_t - v_t}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}, x_{2t} = \frac{v_t - \sigma_1^2 r_t}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}$$

* 瞬时利率与波动率的动态过程

$$dr_t = \left(\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{\kappa_1 \sigma_2^2 - \kappa_2 \sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} r_t - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} v_t \right) dt + \sigma_1 \sqrt{\frac{\sigma_2^2 r_t - v_t}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} dz_{1t} + \sigma_2 \sqrt{\frac{v_t - \sigma_1^2 r_t}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} dz_{2t}$$
$$dv_t = \left(\sigma_1^2 \varphi_1 + \sigma_2^2 \varphi_2 - \sigma_1^2 \sigma_2^2 \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} r_t - \frac{\kappa_2 \sigma_2^2 - \kappa_1 \sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} v_t \right) dt + \sigma_1^3 \sqrt{\frac{\sigma_2^2 r_t - v_t}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} dz_{1t} + \sigma_2^3 \sqrt{\frac{v_t - \sigma_1^2 r_t}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} dz_{2t}$$

关于L-S模型

- * 作为双因子CIR模型，L-S模型保留了单因子CIR模型的系列优点，如利率非负、均值回复、利率波动率与期限及利率水平有关等。
- * 两个不完全相关风险源的引入，使得L-S模型在灵活性上远胜单因子CIR模型
 - * 除了上升、下降、山峰状的利率曲线之外，还可以产生山谷状（先降后升）、山峰与山谷并存等曲线形状
 - * 由于引入瞬时方差，不同期限的利率（零息债价值）之间不再是完全相关的，长短期的变化可能是相反的
 - * 零息债价值不再是瞬时利率的单调函数，短期零息债价值主要受瞬时利率的影响，因此仍然与瞬时利率呈现反向关系，而长期零息债价值则受到瞬时方差的影响更大，其与瞬时利率的关系不一定为反向关系。
 - * 生成的波动率期限结构形状也更为丰富多变
- * 由于仍然是时间齐次模型，L-S模型的长端利率仍然不是时变的。

其他多因子时间齐次仿射模型

- * 因子个数：
 - * 两因子：简单
 - * 三因子：与PCA结果有关
 - * 多因子：Duffee(2011) 拟合静态利率期限结构三因子即可，但要研究利率波动和利率风险溢价，需大于3
- * 因子内涵：瞬时利率、瞬时利率的长期均值和瞬时方差、通胀率、预期通胀率等。
- * 模型设定：
 - * 单个因子多为Vasicek或是CIR的形式
 - * 影响瞬时方差的因子数量不一定
 - * 根据Dai and Singleton(2000)，在三因子模型中，I类模型在刻画瞬时相关性结构上最为灵活，而II类在刻画时变的波动率上最为灵活，III类模型则完全不能刻画具有负相关性的因子。

仿射模型讨论

* 优势

- * 给定瞬时利率的随机过程，不需要求解偏微分方程或公式，经常可以快速得到债券价格的解析解
 - * 对于很多特定形式的仿射模型，Ricatti方程组可解出显式解
 - * 对于其他一些设定，则可以用很有效的方法得到数值解

* 缺陷：无法捕捉非线性

时间齐次非仿射模型

- * Black-Karasinski(1991)：利率为正；均值回复

$$d \ln r_t = \tilde{\kappa} (\ln \tilde{\mu} - \ln r_t) dt + \sigma d\tilde{z}_t$$

- * Rendleman and Bartter(1980)

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\int_T^S r_u du} \right] = \infty$$

$$dr_t = \tilde{\mu} r_t dt + \sigma r_t d\tilde{z}_t$$

- * Brennan and Schwartz(1980)和Courtadon(1982)

$$dr_t = \tilde{\kappa} (\tilde{\mu} - r_t) dt + \sigma r_t d\tilde{z}_t$$

- * Longstaff(1989)、Beaglehole and Tenney(1991,1992)和Leippold and Wu(2002)

$$r_t = x_t^2$$

$$dx_t = \tilde{\kappa} (\tilde{\mu} - r_t) dt + \sigma d\tilde{z}_t$$

关于风险价格

* 完全仿射 (completely affine) : 共同参数太多

$$\lambda_t = \sqrt{\mathbf{v}(\mathbf{x}_t)} \lambda$$

$n \times 1 \quad n \times n \quad n \times 1$

* 基本仿射 (essentially affine)

$$\lambda_t = \sqrt{\mathbf{v}(\mathbf{x}_t)} \lambda_1 + \sqrt{\mathbf{v}(\mathbf{x}_t)^-} \lambda_2 \mathbf{x}_t$$

$n \times 1 \quad n \times n \quad n \times 1 \quad n \times n \quad n \times n \quad n \times 1$

* 扩展仿射 (extended affine, Cheridito et al.(2007)) : 瞬时利率不为零

* 半仿射模型 (semi-affine) $\sqrt{\mathbf{v}(\mathbf{x}_t)} \lambda_t = \lambda_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_t$, 如 $\lambda_t = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\omega_1 r_t}} + \frac{\lambda_2 \sqrt{r_t}}{\sqrt{\omega_1}}$

$n \times n \quad n \times 1 \quad n \times 1 \quad n \times n \quad n \times 1$

Duarte(2004))

$$\lambda_t = \lambda_0 + \sqrt{\mathbf{v}(\mathbf{x}_t)} \lambda_1 + \sqrt{\mathbf{v}(\mathbf{x}_t)^-} \lambda_2 \mathbf{x}_t$$

$n \times 1 \quad n \times n \quad n \times 1 \quad n \times n \quad n \times n \quad n \times 1$

$$\lambda_t = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\omega_1}} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\omega_1 r_t}} + \frac{\lambda_2 \sqrt{r_t}}{\sqrt{\omega_1}}$$

均衡模型的时间序列估计法

- * 方法：极大似然估计/矩估计

- * 特点

- * 得到的是现实测度参数而非风险中性参数和风险价格。只能用于刻画现实市场中利率的动态特征，不能用于定价，也不能得到利率风险溢酬的相关信息。
- * 应使用无风险瞬时利率数据。但瞬时利率是不可观测的，多使用1或3个月期的国债即期利率作为代理变量，存在误差。
- * 由于每次估计只使用一个特定期限（如1个月期）的即期利率时间序列进行估计，估计得到的参数实际上仅吻合这一期限利率的时间序列特征，无法保证符合整条利率曲线的时变特征。因此从本质上说，时间序列估计法并没有估计出刻画整条利率曲线动态特征的模型参数。

均衡模型的横截面校准法

- * 求得一组参数，使得给定时刻（横截面上）的高流动性债券（有时包括其他固定收益证券）的模型价值尽量接近市场价格。

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \arg \min_{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i g[l_i(\text{model}_i) - l_i(\text{market}_i)] \right\}$$

* 特点

- * 得到的是定价测度下的参数，多为风险中性测度参数，无法得到现实测度下的漂移率参数和风险价格，只能用于为其他利率产品定价，无法用于刻画现实市场中的利率特征
- * 完全忽略时间序列维度上的动态特征
- * 实际上是时间非齐次的。

参数估计

- * 时间序列估计法：极大似然估计和矩估计
 - * 什么是瞬时利率的proxy？
 - * 只能估计现实测度下的参数
 - * 忽略了横截面信息
 - * 样本应如何取？
- * 横截面估计法：校准法
 - * 只能估计风险中性参数
 - * 忽略了时间序列动态信息
- * 面板估计

均衡模型的面板估计法

- * 方法1：先用时间序列估计出现实测度的参数，再以这些参数作为输入，根据某个时刻的横截面市场价格来确定风险价格和风险中性参数。
- * 方法2：先用某时刻的横截面数据得到风险中性参数，再以这些参数作为输入，运用时间序列数据求得现实参数和风险价格。
- * 方法3：卡尔曼滤波（Kalman filter）方法和MCMC（Markov chain Monte Carlo）方法同时拟合
- * 从理论上说，方法3估计得到的参数，既可用于定价，也可用于刻画利率动态特征。但由于一段时间的样本只能得到一组参数，并不能适应动态变化的市场需要，因此通常也只用于刻画现实市场中利率的动态特征，很少用于定价。

CKLS(1992)

* CKLS (1992)

- * 1个月利率；时间序列；1964-89；8种模型
- * 参数 γ 决定了该模型是否被数据接受
- * 不限制模型下的 γ 估计值为1.5
- * 偏低 γ 值都被拒绝（Vasicek和CIR）；BM被接受

* 批评

- * 瞬时利率/多个即期利率
- * 样本期
- * 不同方法
- * 波动率为常数、没有均值回复的模型都被拒绝；大多数检验接受CIR模型

3.

无套利模型

3.1

校准的均衡模型

均衡模型与无套利模型

- * 经典的均衡模型多为时间齐次模型：用有限参数的模型刻画无限维、时变的利率曲线
- * 均衡模型结果与债券价格的拟合度低。如果一个模型连给债券定价都不准确，如何能够信任它为其他利率衍生品的定价结果？
- * 多用均衡模型来刻画市场利率的一般变化规律
- * 无套利模型用于定价

Ho-Lee (1986)

- * Dybvig(1988)证明其连续形式为

$$dr_t = \tilde{\mu}(t)r_t dt + \sigma d\tilde{z}_t$$
$$\tilde{\mu}(t) = \frac{\partial f_0^t}{\partial t} + \sigma^2 t$$

- * 基本性质

- * 无套利接口：每个时刻的利率曲线成为模型的输入数据，该模型与市场无风险利率曲线（债券价值）是天然拟合的
- * 简单
- * 但并未改善Merton模型的缺陷

如何得到？

$$B_0^T = e^{-\alpha(0,T) - \beta(0,T)r_0}$$

$$\beta(0,T) = T$$

$$\alpha(0,T) = \int_0^T [\tilde{\mu}(s)(T-s)] ds - \frac{\sigma^2}{6} T^3$$

运用莱布尼兹规则 (Leibnitz's rule) ¹对 $\alpha(0,T)$ 求二阶导可以得到,

$$\tilde{\mu}(T) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2}(0,T) + \sigma^2 T \quad (6.70)$$

由于

$$\alpha(0,T) = -\beta(0,T)r_0 - \ln B_0^T = -Tr_0 - \ln B_0^T$$

和

$$f_0^T = -\frac{\partial \ln B_0^T}{\partial T}$$

我们有

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2}(0,T) = -\frac{\partial^2 \ln B_0^T}{\partial T^2} = \frac{\partial f_0^T}{\partial T}$$

将其代入式(6.70), 并将 T 替换为 t , 就可得到式(6.69)。

Hull-White (1990,1994a)单因子模型

* Vasicek模型 \rightarrow Hull-White 单因子模型

$$dr_t = \tilde{\kappa} [\tilde{\varphi}(t) - r_t] dt + \sigma d\tilde{z}_t$$

$$\tilde{\varphi}(t) = f_0^t + \frac{1}{\tilde{\kappa}} \frac{\partial f_0^t}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2\tilde{\kappa}^2} (1 - e^{-2\tilde{\kappa}t})$$

* 基本性质

* 无套利

* 简单

* 但并未改善Vasicek模型的缺陷

Hull-White (1994b)双因子模型

* 双因子Vasicek模型 \rightarrow Hull-White 双因子模型

$$\begin{aligned}dr_t &= \left(\tilde{\varphi}(t) + \varphi_t - \tilde{\kappa}_r r_t \right) dt + \sigma_r d\tilde{z}_{1t} \\d\varphi_t &= -\tilde{\kappa}_\varphi \varphi_t dt + \sigma_\varphi \rho d\tilde{z}_{1t} + \sigma_\varphi \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{z}_{2t} \\ \tilde{\varphi}(t) &= \frac{\partial f_0^t}{\partial t} + \tilde{\kappa}_r f_0^t + \frac{\partial \xi(0, t)}{\partial t} + \tilde{\kappa}_r \xi(0, t)\end{aligned}$$

* 基本性质

- * 长短期利率有各自（相关）风险源
- * 无套利
- * 正态分布假设仍未改变

非仿射校准模型

- * 除了仿射模型，非仿射模型也可以通过动态校准参数来转化为无套利模型
- * 对于这些相对复杂的模型，校准后往往连最普通的零息债都没有解析解，只能通过数值方法求解

BDT模型 (Black, Derman and Toy, 1990)

- * BDT模型的基本假设是利率服从对数正态分布，以保证利率始终为正，相应的离散形式同样是上升下降概率均为0.5的二值运动。
- * BDT模型最重要的特征就是不仅漂移率、而且波动率都是时变的，以同时拟合每个时刻市场的利率期限结构和波动率期限结构。

BDT模型单期树图

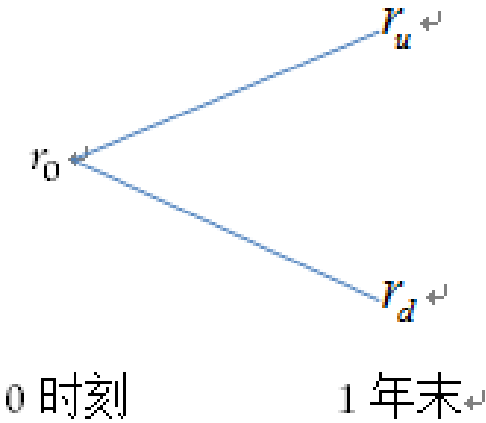
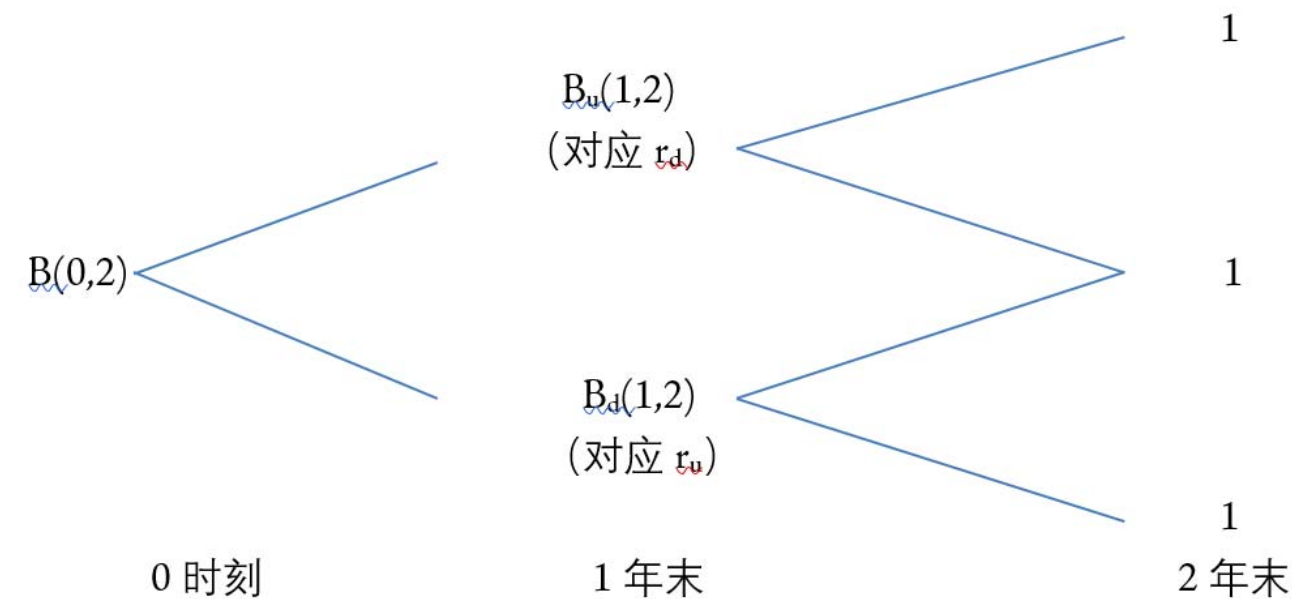


表 7.1 零息债到期收益率及其波动率期限结构

剩余期限（年）	到期收益率	波动率
1	10%	
2	11%	19%
3	12%	18%

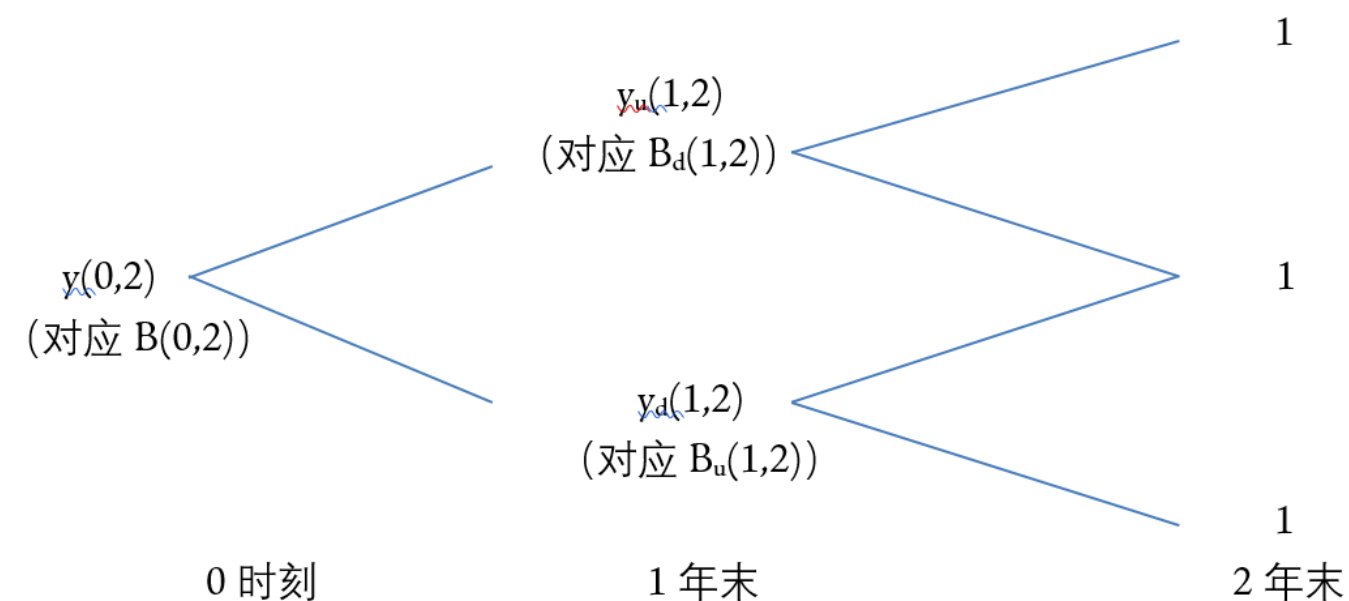
* 拟合2年期零息债到期收益率



$$B_u(1,2) = e^{-r_d \times 1} = e^{-r_d}, B_d(1,2) = e^{-r_u \times 1} = e^{-r_u}$$

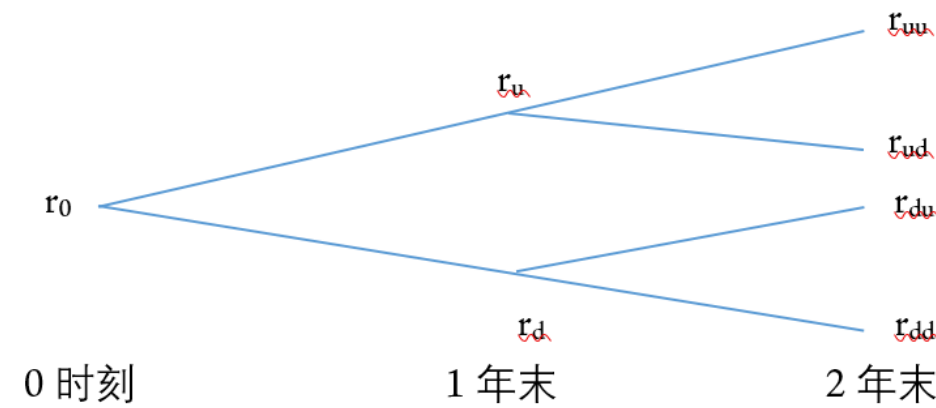
$$\begin{aligned} B(0,2) &= (0.5B_u(1,2) + 0.5B_d(1,2))e^{-r_0 \times 1} \\ &= (0.5 \times e^{-r_d} + 0.5 \times e^{-r_u}) \times e^{-10\%} = 0.8025 \end{aligned}$$

* 拟合2年期零息债到期收益率波动率



$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}_t[\ln y(1,2)] &= 0.5 \ln y_u(1,2) + 0.5 \ln y_d(1,2) \\ \text{VAR}_t[\ln y(1,2)] &= 0.5 \left(\ln y_u(1,2) - \tilde{\mathbb{E}}_t[\ln y(1,2)] \right)^2 + 0.5 \left(\ln y_d(1,2) - \tilde{\mathbb{E}}_t[\ln y(1,2)] \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \frac{y_u(1,2)}{y_d(1,2)} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{r_u}{r_d} \right)^2 = 19\%\end{aligned}$$

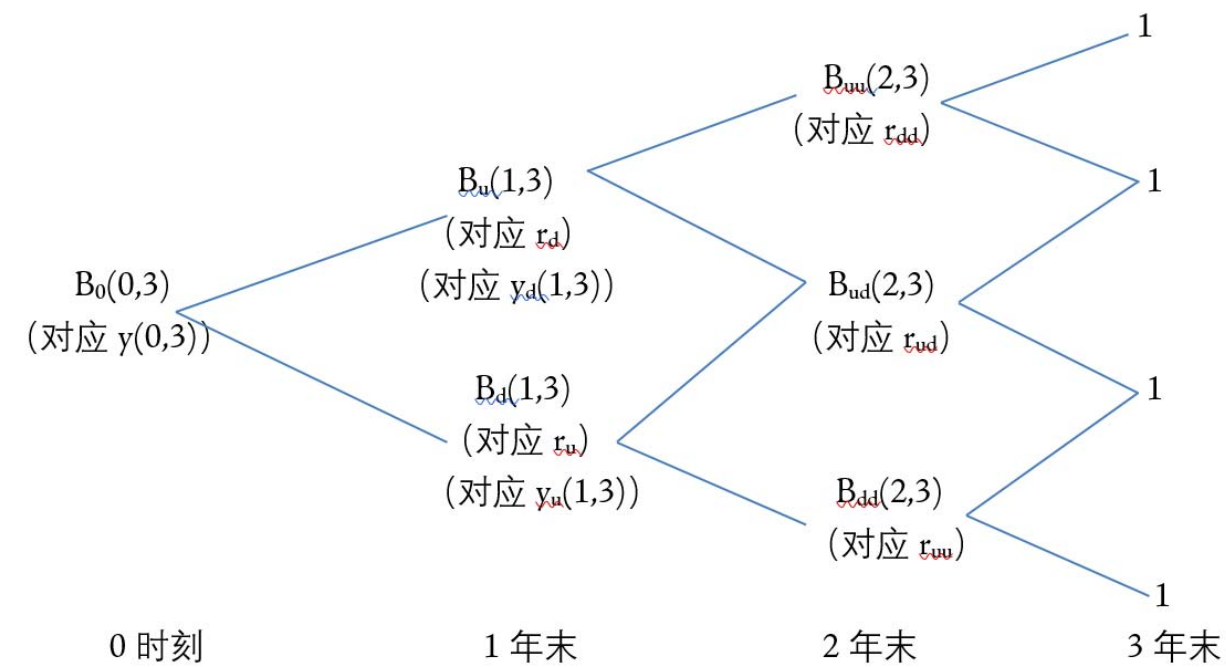
BDT模型两期树图



* 保证节点重合：同一时刻的波动率应该相等

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_{uu}}{r_{ud}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_{du}}{r_{dd}} \right)$$
$$\rightarrow r_{uu} r_{dd} = r_{ud}^2$$

* 拟合3年期零息债到期收益率



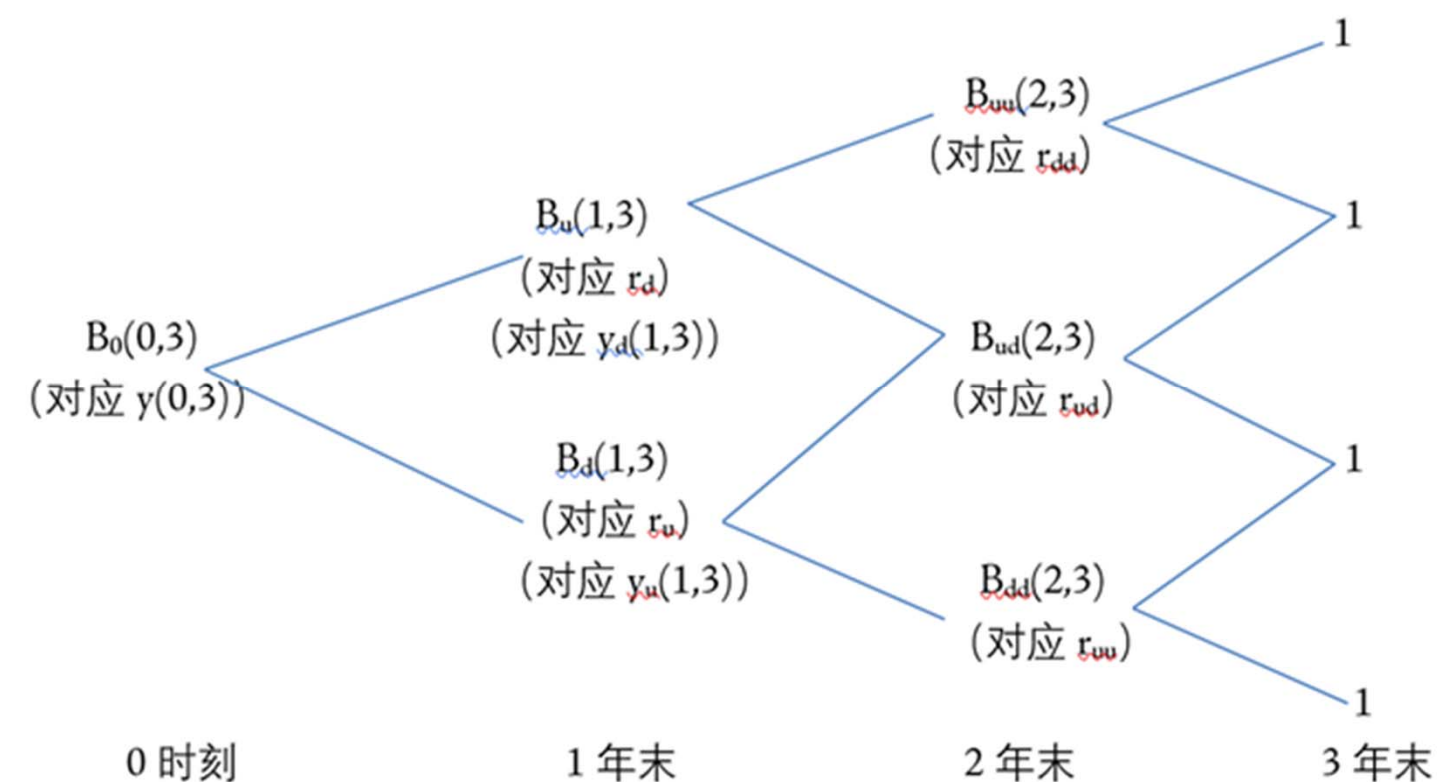
$$B_{uu}(2,3) = e^{-r_{dd}}, B_{ud}(2,3) = e^{-r_{ud}}, B_{du}(2,3) = e^{-r_{du}}, B_{dd}(2,3) = e^{-r_{uu}}$$

$$B_u(1,3) = (0.5B_{uu}(2,3) + 0.5B_{ud}(2,3))e^{-9.79\%},$$

$$B_d(1,3) = (0.5B_{du}(2,3) + 0.5B_{dd}(2,3))e^{-14.32\%}$$

$$B(0,3) = (0.5B_u(1,3) + 0.5B_d(1,3))e^{-10\%} = e^{-12\% \times 3}$$

* 拟合3年期零息债到期收益率波动率



$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{y_u(1,3)}{y_d(1,3)} \right) = 18\%$$

$$B_u(1,3) = e^{-y_d(1,3) \times 2}, B_d(1,3) = e^{-y_u(1,3) \times 2}$$

BDT模型的多期树图

- * 在 i 时刻，总有 $i+1$ 个待估节点值，而通过拟合 $i+1$ 年期零息债收益率和波动率，总可以写出2个方程，保证中间节点重合的约束条件则有 $i-1$ 个，可以写出如式的 $i-1$ 个方程。
- * BDT模型所使用的是利率对数的波动率
- * 零息债到期收益率的波动率度量的是给定到期日的零息债到期收益率一期变化的标准差。由于波动率反映的是未来的波动信息，因此在二叉树模型中需要运用1年后的数据进行计算，而1年后的债券剩余期限将减少1年，因此 $n+1$ 年后到期的零息债的波动率实际上等于剩余期限为 n 年的即期利率的波动率。

BDT模型的基本性质

- * Hull and White (1990)指出其连续形式

$$d\ln r_t = \left[\tilde{\varphi}(t) + \frac{1}{\sigma(t)} \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} \ln r_t \right] dt + \sigma(t) d\tilde{z}_t$$

- * BDT模型实际上是假设瞬时利率对数服从三个参数都时间非齐次的Vasicek模型
- * 模型只有两个待估参数： $\sigma(t)$ 同时决定了瞬时利率对数的波动率和均值回归速度；瞬时利率对数的长期均值则由 $\sigma(t)$ 和 $\tilde{\varphi}(t)$ 共同决定。这两个时变的参数都由 t 时刻的市场数据校准得到。

BDT模型优点

- * 与Hull-White单因子模型相比，BDT模型不仅可以完全拟合当前市场上的利率期限结构，还可以完全拟合当前利率波动率的期限结构。
- * 此外，由于BDT模型使用利率的对数建模，还避免了模型生成负利率的可能
- * 实现过程相对简单

BDT模型缺点

- * 利率的均值回复速度完全由波动率决定，过于严格且可能并不合理
- * BDT模型同时拟合利率期限结构和利率波动率期限结构，所有参数都时间非齐次，有为了追求拟合实际数据而“拉扯过度”之嫌，仅假设长期均值时间非齐次尚可勉强接受，如果波动率也假设为时间齐次就比较容易引起批评
- * Hogan and Weintraub (1993)发现假设连续复利的瞬时利率服从对数正态分布，会导致未来一段时间内的货币市场账户价值的风险中性期望趋于正无穷，欧洲美元期货价格趋于负无穷

B-K模型 (Black and Karasinski , 1991)

- * BDT模型的一般化

$$d \ln r_t = \tilde{\kappa}(t)(\tilde{\mu}(t) - \ln r_t)dt + \sigma(t)d\tilde{z}_t$$

- * 时变的均值回归速度

- * 灵活性提高，样本内拟合效果提高

- * 但同时也意味着拟合该模型所需的市场信息也将增加，且样本外的定价和预测结果并不必然优于BDT模型

- * 节点重合：或者回到BDT模型；或者令每一步的时间间隔不同；或者采用三叉树

B-K模型的离散形式

* 离散树图

$$r_u = re^{\tilde{\kappa}(t)(\ln \tilde{\theta}(t) - \ln r_0)\tau + \sigma(t)\tau}$$

$$r_d = re^{\tilde{\kappa}(t)(\ln \tilde{\theta}(t) - \ln r_0)\tau - \sigma(t)\tau}$$

* 节点重合

* (1)

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{\sigma(t) - \sigma(t - \tau)}{\sigma(t) \cdot \tau}$$

* (2)

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{1 - \frac{\sigma(t) \cdot \sqrt{\tau(t)}}{\sigma(t - \tau) \cdot \sqrt{\tau(t - \tau)}}}{\tau(t - \tau)}$$

* (3) 三叉树图

从时间齐次到时间非齐次：校准模型

- * 通过将原有均衡模型的常数参数设定为时间非齐次的时变函数，以保证模型能够时变地拟合每天的市场信息。
- * 这些模型可以是Vasicek模型或是CIR模型，可以是单因子或多因子模型，可以是仿射模型或非仿射模型，所校准的市场数据可以是市场利率期限结构、利率波动率期限结构或其他固定收益证券市场数据，设定为时间非齐次的参数可以是漂移项参数或是波动项参数。

哪些参数设定为时间非齐次？

* 单因子仿射模型

$$dr_t = (\tilde{\varphi} - \tilde{\kappa}r_t)dt + \sqrt{\omega_0 + \omega_1 r_t}d\tilde{z}_t$$

* 即期利率绝对波动率

$$\frac{\beta(t, T)}{T-t} \sqrt{\omega_0 + \omega_1 r_t}$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial (T-t)} + \beta \tilde{\kappa} + \frac{1}{2} \beta^2 \omega_1 - 1 = 0$$

- * 如果不希望模型过度拉扯，不希望校准市场波动率数据，而只愿意校准市场利率数据，跟波动率有关的所有参数都应该是时间齐次的

校准模型的缺点

- * 过于强调拟合当时的市场数据，校准得到的参数可能存在过强的时变性，经济意义不足
- * 在校准中最常用的无风险利率期限结构本身也是拟合得到的，例如样条法经常会产生不切实际的远期利率期限结构和远期利率斜率，而均衡模型的校准正依赖于远期利率曲线及其一阶导，NS类模型具有光滑的远期利率曲线，但又具有模型风险
- * 校准模型通常只在为那些与校准数据具有密切关系和类似特征的资产定价时较为准确，对于其他证券，一个多因子均衡模型可能表现得比校准的单因子模型还要好。
- * 多因子模型也可以校准，但从本质上说，校准模型和多因子模型都是为了更好地拟合市场真实情形，多因子模型本身已经有多个参数，通常认为对多因子模型进行校准的意义相对较小

3.2

HJM模型

HJM(1992)框架的基本逻辑

- * 在构建动态利率模型时就引入无套利要求，使模型产生的初始收益率曲线与当前观察到的市场利率期限结构一致，构造出来的模型自然就是无套利的相对定价模型。
- * 由于已经利用了利率期限结构的信息，该模型不能再为普通债券定价，只能用于为其他利率衍生品定价。

HJM建模对象：瞬时远期利率

- * 瞬时远期利率是利率期限结构的最基本元素

$$B_t^T = e^{-\int_t^T f_t^u du}, \ln B_t^T = -\int_t^T f_t^u du, R_t^T = -\frac{\int_t^T f_t^u du}{T-t}$$

$$f_t^T = -\frac{\partial \ln B_t^T}{\partial T} = R_t^T + (T-t) \frac{\partial y_t^T}{\partial T}$$

- * 瞬时远期利率与瞬时利率的关系最为简单

$$r_t = f_t^t = \lim_{T \downarrow t} R_t^T = -\lim_{T \downarrow t} \frac{\partial \ln B_t^T}{\partial T}$$

- * 债券的波动率期限结构比利率的波动率期限结构复杂

HJM模型：现实测度

* Leibnitz规则和Ito引理

$$df_t^T = \mu_{f,t}^T(\omega)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{fi,t}^T(\omega)dz_{it}$$

$$B_t^T = e^{-\int_t^T f_t^u du}$$

$$\frac{dB_t^T}{B_t^T} = \left\{ r_t - \int_t^T \mu_{f,t}^u du + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\int_t^T \sigma_{fi,t}^u du \right]^2 \right\} dt - \sum_{i=1}^n \left[\int_t^T \sigma_{fi,t}^u du \right] dz_{it}$$

HJM模型：风险中性测度

$$d\tilde{z}_{it} = dz_{it} + \lambda_{it} dt$$

$$df_t^T = \tilde{\mu}_{f,t}^T dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{fi,t}^T d\tilde{z}_{it} = \left[\mu_{f,t}^T - \sum_{i=1}^n \sigma_{fi,t}^T \lambda_{it} \right] dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{fi,t}^T d\tilde{z}_{it}$$

$$\frac{dB_t^T}{B_t^T} = \left\{ r_t - \int_t^T \mu_{f,t}^u du + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\int_t^T \sigma_{fi,t}^u du \right]^2 - \sum_{i=1}^n \left[\int_t^T \sigma_{fi,t}^u du \right] \lambda_{it} \right\} dt - \sum_{i=1}^n \left[\int_t^T \sigma_{fi,t}^u du \right] d\tilde{z}_{it}$$

$$\tilde{\mu}_{f,t}^T = \sum_{i=1}^n \sigma_{fi,t}^T \int_t^T \sigma_{fi,t}^u du$$

$$r_t = f_t^t = f_0^t + \int_0^t \tilde{\mu}_{f,s}^t ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_{fi,s}^t d\tilde{z}_{is}$$

$$dr_t = \left[\frac{\partial f_0^t}{\partial t} + \tilde{\mu}_{f,t}^t + \int_0^t \frac{\partial \tilde{\mu}_{f,s}^t}{\partial t} ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial \sigma_{fi,s}^t}{\partial t} d\tilde{z}_{is} \right] dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{fi,t}^t d\tilde{z}_{it}$$

HJM模型结论

- * 在无套利的HJM模型下，只要给定波动率，同时运用当前0时刻的利率期限结构信息作为输入，就足以刻画瞬时即期和瞬时远期利率这两个基础性变量在风险中性测度下的随机过程，进而可以在风险中性测度下为利率衍生品定价。
- * 这与BSM模型在风险中性测度下，无需估计股票价值的相对漂移率，只需估计波动率，再运用当前时刻的股票价格，就可以为股票衍生品定价的基本特征十分相似，因此HJM模型是典型的无套利相对定价模型。

HJM模型特征

- * 可能是非马尔可夫过程
- * 信息仅为其他期限的同时刻瞬时远期利率时，可以视为无限维的扩散过程
- * 维度无限，PDE方法无法采用，但仍然可以通过在合适的鞅测度下计算期望值来给债券等利率衍生品定价
- * 在无套利条件下，风险中性测度下瞬时远期利率的漂移率是波动项的函数，波动率完全决定了瞬时远期利率的风险中性过程，而在HJM分析框架下，风险中性测度和现实测度下的波动项相同。
- * 不需要风险价格的信息，即可从现实测度转换至风险中性测度
- * 只要给定波动率，同时运用0时刻的利率期限结构信息，就可以为利率产品定价
- * 仅是一个分析框架

连续无套利模型：Ho-Lee模型

* 单一风险源且波动率为常数

$$df_t^T = \sigma^2 (T - t)dt + \sigma d\tilde{z}_t$$

$$dr_t = \left[\frac{\partial f_0^t}{\partial t} + \sigma^2 t \right] dt + \sigma d\tilde{z}_t$$

连续无套利模型：Hull-White模型

* 单一风险源且波动率为时间的函数，如下

$$\sigma_{ft}^T = \sigma e^{-\tilde{\kappa}(T-t)}$$

$$df_t^T = \frac{\sigma^2}{\tilde{\kappa}} e^{-\tilde{\kappa}(T-t)} \left[1 - e^{-\tilde{\kappa}(T-t)} \right] dt + \sigma e^{-\tilde{\kappa}(T-t)} d\tilde{z}_t$$

$$r_t = f_t^t = f_0^t + \int_0^t \frac{\sigma^2}{\tilde{\kappa}} e^{-\tilde{\kappa}(t-s)} \left[1 - e^{-\tilde{\kappa}(t-s)} \right] ds + \int_0^t \sigma e^{-\tilde{\kappa}(t-s)} d\tilde{z}_s$$

$$dr_t = \tilde{\kappa} \left[\frac{1}{\tilde{\kappa}} \frac{\partial f_0^t}{\partial t} + f_0^t + \frac{\sigma^2}{2\tilde{\kappa}^2} \left(1 - e^{-2\tilde{\kappa}t} \right) - r_t \right] dt + \sigma d\tilde{z}_t$$

3.3

市场模型

LIBOR Market Model

- * 瞬时即期/远期利率作为建模对象
 - * 瞬时利率不可观测
 - * 模型相对不易理解
 - * 较难用市场价格校准模型参数
- * 连续复利利率不宜假设对数正态
- * Sandmann and Sondermann (1997)：普通复利利率可以假设服从对数正态分布
- * Brace, Gatarek and Musiela (1997)、Jamshidian(1997)和Miltersen, Sandman and Sondermann(1997)等人在HJM框架下提出了一套对市场利率的建模方法
 - * LIBOR市场模型 (LIBOR market models, LMM)
 - * 互换市场模型

LFM模型 (BGM/LMM)

- * Lognormal forward-LIBOR model, LFM
- * 远期利率在 $B(t, T^*)$ 远期测度下服从对数正态分布

$$dR_t^{T, T^*} = \sigma_R(t) R_t^{T, T^*} dz_t^{T^*}$$

- * 其中 $\sigma_R(t)$ 为时间的确定性函数。

LSM模型

- * Lognormal swap model, LSM
- * 互换利率在对应的互换测度下服从对数正态分布

$$ds_t = \sigma_s(t) s_t dz_t^A$$

- * 其中 $\sigma_s(t)$ 为时间的确定性函数。

市场模型的本质

- * Black模型：对数正态下的欧式期权定价
- * 无套利模型：天然拟合市场上的利率期限结构（零息债价值）
- * HJM模型：转换至风险中性测度，市场模型下利率的漂移率同样不受风险价格的影响，波动率决定了整个随机过程

市场模型的广泛应用

- * 直接针对交易者熟悉的可观测利率建模
- * 无套利模型应用性强
- * 利率衍生品中的两大主要类别——利率顶（利率底）和利率互换期权都可以直接用简单的Black模型进行定价，大大便利了定价和参数校准，且波动率参数的经济意义易于理解，使其成为这些市场中的标准模型

市场模型的问题

- * 适用性
- * 模型风险：一定是对数正态分布吗？
- * 内在一致性
 - * 共同测度：最远测度/即期LIBOR鞅测度
 - * 同时对数正态分布的合理性
 - * 瞬时相对波动率的设定

	$t \in (0, T_0]$	$t \in (T_0, T_1]$	$t \in (T_1, T_2]$	$t \in (T_{m-2}, T_{m-1}]$
$L_t^{T_0, T_1}$	ϕ_1	到期	到期	到期	到期
$L_t^{T_1, T_2}$	ϕ_2	ϕ_2	到期	到期	到期
\vdots
$L_t^{T_{m-1}, T_m}$	ϕ_m	ϕ_m	ϕ_m	ϕ_m

	$t \in (0, T_0]$	$t \in (T_0, T_1]$	$t \in (T_1, T_2]$	$t \in (T_{m-2}, T_{m-1}]$
$L_t^{T_0, T_1}$	φ_1	到期	到期	到期	到期
$L_t^{T_1, T_2}$	φ_2	φ_1	到期	到期	到期
\vdots
$L_t^{T_{m-1}, T_m}$	φ_m	φ_{m-1}	φ_{m-2}	φ_1

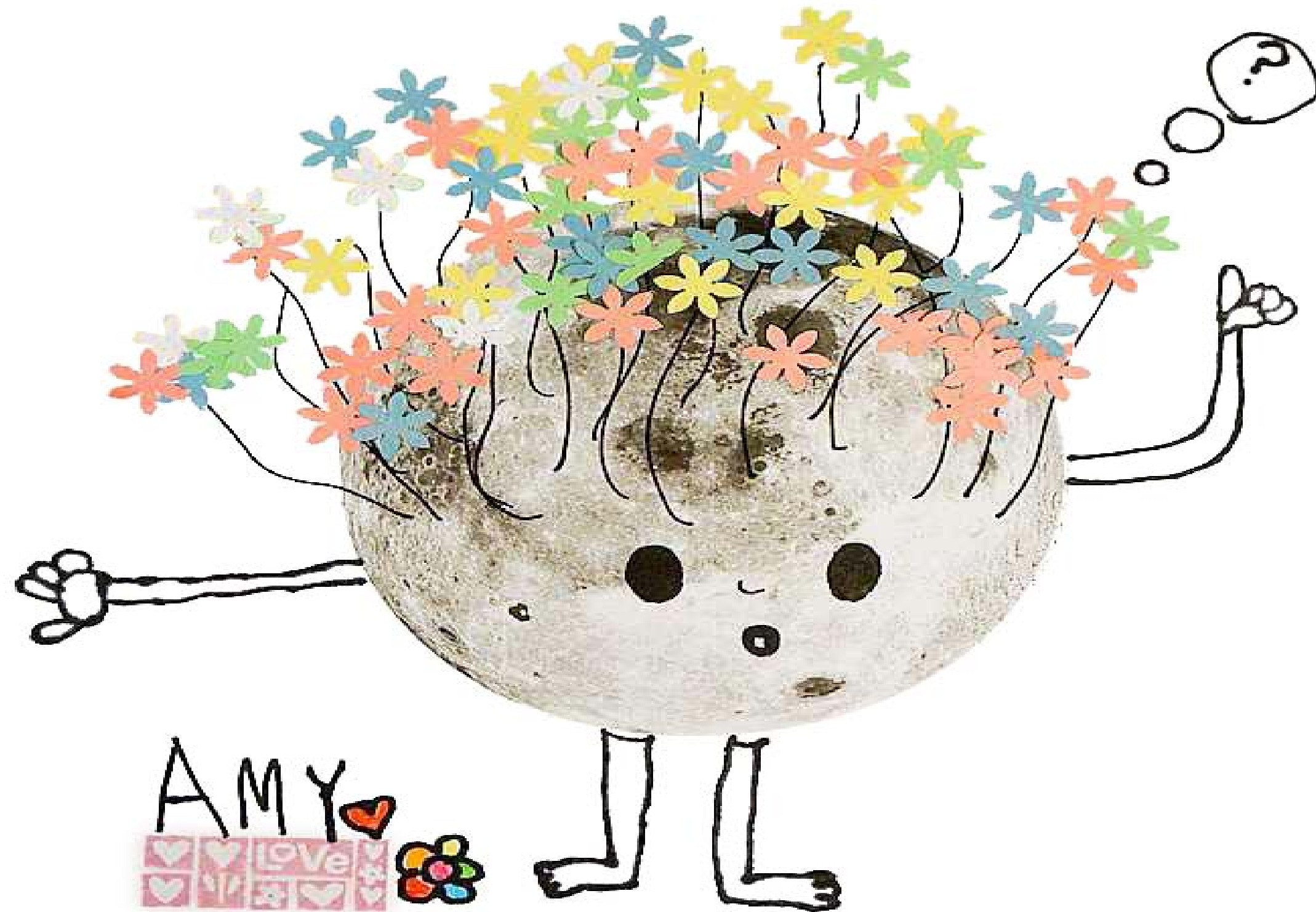
$$\square$$

	$t \in (0, T_0]$	$t \in (T_0, T_1]$	$t \in (T_1, T_2]$	$t \in (T_{m-2}, T_{m-1}]$
$L_t^{T_0, T_1}$	$\Phi_1 \zeta_1$	到期	到期	到期	到期
$L_t^{T_1, T_2}$	$\Phi_2 \zeta_1$	$\Phi_2 \zeta_2$	到期	到期	到期
\vdots
$L_t^{T_{m-1}, T_m}$	$\Phi_m \zeta_1$	$\Phi_m \zeta_2$	$\Phi_m \zeta_3$	$\Phi_m \zeta_m$

$$\square$$

	$t \in (0, T_0]$	$t \in (T_0, T_1]$	$t \in (T_1, T_2]$	$t \in (T_{m-2}, T_{m-1}]$
$L_t^{T_0, T_1}$	$\Phi_1 \Psi_1$	到期	到期	到期	到期
$L_t^{T_1, T_2}$	$\Phi_2 \Psi_2$	$\Phi_2 \Psi_1$	到期	到期	到期
\vdots
$L_t^{T_{m-1}, T_m}$	$\Phi_m \Psi_m$	$\Phi_m \Psi_{m-1}$	$\Phi_m \Psi_{m-2}$	$\Phi_m \Psi_1$

Any Questions ?



The End.