

文章编号: 1002-1566(2017)02-0361-20
DOI: 10.13860/j.cnki.sltj.20170123-016

中国国债期货与隐含择券期权定价

陈蓉¹ 葛骏²

(1. 厦门大学 管理学院, 福建 厦门 361005; 2. 兴业银行 资金营运中心, 上海 200041)

摘要: 本文提出了一种双树拼接的改进 BDT 模型, 在此基础上发展出两种方法为中国市场上的国债期货和择券期权定价。其中“直接定价法”直接使用双树拼接树图, “两步定价法”则是经期权调整的持有成本模型。对中国 TF1403 和 T1603 国债期货合约的实证研究表明, 两种方法都是合理的, 且各有优势, “两步定价法”与市场价格差异较小, “直接定价法”与市场价格同步性较高。

关键词: 国债期货; 择券期权; 双树拼接 BDT 模型

中图分类号: F832.5, O212

文献标识码: A

Pricing the China's Treasury Bond Futures and the Implied Quality Options

CHEN Rong¹ GE Jun²

(1. School of Management, Xiamen University, Fujian Xiamen 361005, China, 2. Financial Markets, Industrial Bank Co., Ltd., Shanghai 200041, China)

Abstract: A Two-Tree-Combined Black-Derman-Toy dynamic term structure of interest rates model and a cost-of-carry model which incorporated quality option are proposed to price the China Treasury Bond Futures and the implied quality option of the contract. The empirical studies on the TF1403 and T1603 contracts show that both models are reasonable and have different strengths. The pricing results of the first model are highly consistent with the trend of the market price, whereas the pricing results of the second model are closer to the market prices.

Key words: treasury bond futures, quality option, two-tree-combined BDT model

0 引言

2013 年 9 月 6 日, 中国金融期货交易所 (以下简称“中金所”) 推出中期 (5 年期) 国债期货合约。与 1995 年的旧版国债期货合约设计迥然不同, 为防止现货体量太小易被操纵的现象重演, 新版的中期国债期货合约借鉴国际的成功经验, 将其标的资产 (即“可交割债券”) 设定为“期货合约到期月首日剩余期限为 4-7 年的记账式附息国债” (2015 年后改为 4-5.25 年)。这使得目前每个期货合约的可交割债券可达 15-30 只, 面值总量可达万亿, 大大增加了操纵难度。2015 年 3 月 20 日, 长期 (10 年期) 国债期货上市交易, 也采用类似的合约设计。从迄今为止的实际运行来看, 市场公认这种多种可交割券的设计在新版国债期货市场的稳健运行中发挥了重要的作用。

收稿日期: 2014 年 11 月 18 日

收到修改稿日期: 2016 年 11 月 1 日

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71371161, 71471155); 国家自然科学基金青年项目 (71101121)。

当然,这一设计也使得国债期货定价相对复杂。由于可交割券不止一种,交易所赋予期货空方“择券期权”(也称“质量期权”),即在交割时空方有权利在所有可交割券中选择特定债券进行交割。为使得各可交割券尽量公平,交易所引入了转换因子,对不同的可交割券进行尽量公平的转换,但其中仍难以避免地存在某只债券比其他债券更加合算的情形,从而更可能被期货空方选中进行交割,该债券就被称为“最便宜可交割券”(the cheapest to deliver,下称“CTD 券”)。显然,由于对空方有利而对多方不利,这一期权的存在必然会反映在国债期货价格中,使得国债期货价格相对下降。因此,要为国债期货合理定价,必须考虑这一择券期权的价值。

本文的工作,就是为我国新推出的国债期货合约中的择券期权和整个国债期货构建合理的定价模型。本文对现有的方法加以改进,提出了双树拼接的改进 BDT 模型,并在此基础上首次发展出两种具有良好可操作性的模型方法,为国债期货和择券期权定价,并运用这两种方法为 2014 年 3 月到期的中期国债期货合约(即 TF1403 合约)和 2016 年 3 月到期的长期国债期货合约(即 T1603 合约)定价,对这两种方法的优劣与适用情形进行了对比分析。

作为首篇对我国国债期货定价进行全面理论探讨和对我国国债期货及其择券期权的真实价值进行深入考察的文章,本文的研究具有十分重要的意义:首先,我国国债期货推出已近 3 年,由于研究难度较大,至今未有人对其中的择券期权定价进行深入全面的理论研究和实际探索,本文的研究将突破这一现状,有助于提高国债期货定价的精确性,也可以为投资者和监管者理解国债期货价格和其中的期权特性提供重要参考;其次,国债期货的最重要功能是对利率风险进行套期保值,其本质就是用合理数量的国债期货的涨跌盈亏来对冲现货的涨跌盈亏,如果对择券期权的价值没有充分认识,就无法准确预知国债期货的价格会如何涨跌,也就难以测算合理的套保比率,从而大大降低套期保值的效果,而且,利率波动大的时期,对精确套保的需求越大,然而,也正是在这样的时期,择券期权价值越大,如果不深入研究择券期权定价,套期保值效果将大打折扣;第三,本文所提出的“双树拼接”树图方法是一种适用于利率衍生品的高效灵活的通用定价方法,其不仅可以用于国债期货定价,在按照具体衍生品合约条款对边界条件进行修改后,也可适用于其他利率期权的定价。虽然中国目前尚未出现正式和广泛的利率期权交易,但本文所提出的“双树拼接”树图方法可以为未来中国市场上的利率期权定价提供有益的思路和经验借鉴。

下文的主要结构和研究逻辑如下:第 1 节为文献综述,简要介绍和讨论了国外现有的国债期货与择券期权定价方法;第 2 节对现有方法加以改进,提出两种可操作的模型方法,为国债期货和择券期权定价;第 3 节报告了中国市场的实证定价结果,对两种方法进行了对比,并研究了国债期货价格和择券期权价值在中国市场上的真实表现和基本特征;第 4 节更换样本,进行稳健性检验,第 5 节为结论。

1 文献综述

目前来看,国外对国债期货及择券期权定价的相关研究大致可分为以下 4 类(陈蓉和葛骏^[18]对现有文献中的主要研究方法进行了总结,本文引用该文的结论,更详细的文献讨论可参见陈蓉和葛骏^[18]):

1.1 利用历史交割数据计算已实现择券期权价值

这种“已实现期权价值法”假设期货空方在到期前买入某一种债券并持有到期,然后根据真实的历史数据计算期货空方在交割时用最合算的 CTD 券替代该债券进行交割所得到的回报,主要文献包括 Hegde^[1]和 Hemler^[2]等。此方法的最大优点在于不需要对债券价格和利率过程做任何设定;缺点之一是需要一段较长时间的真实到期交割数据,而我国新版国债期货

开展交易时间还不长, 积累下来的交割数据量不足, 显然不符合要求; 该方法另一个更重要的缺点是只能提供择券期权价值的历史表现, 并不能用于国债期货的实时定价, 因而不是本文可采用的研究方法。

1.2 利用历史成交价格数据倒推市场隐含的择券期权价值

这种“隐含期权价值法”先剔除择券期权的影响, 运用持有成本模型(我们将在后文详细介绍此方法)计算出含期权的国债期货价格, 再将其减去国债期货的市场价格, 认为得到的就是市场隐含的择券期权价值, 主要文献包括 Gay 和 Manaster^[3]、Hemler^[1]等人的工作。与“已实现期权价值法”一样, “隐含期权价值法”也不需要假设债券价格和利率所服从的随机过程; “隐含期权价值法”与“已实现期权价值法”的不同之处则在于: 后者使用期货的交割数据, 而前者使用的则是国债期货成交价格, 研究时的数据要求较容易满足; 然而, 正如 Chance 和 Hemler 所指出的^[4], 很难说该方法得到的究竟确实是择券期权价值, 还是其他期权的价值、市场定价偏误或计算中出现的误差; 另外, 该方法依然只能提供择券期权价值的历史数据, 无法在国债期货的实时定价中发挥作用。尽管存在一定的不足, 在实证研究中, 本文将运用“隐含期权价值法”倒推中国国债期货价格中隐含的择券期权价值, 并与择券期权的理论价值进行比较和讨论。

1.3 利用市场上其他利率衍生品的价格为择券期权定价

我们将这种方法简称为“静态复制法”, Boyle^[5]、Balbas 和 Reichardt^[6]是此类研究的典型代表。“静态复制法”的基本思路是将国债期货中择券期权的价值表达为可交易的利率期权的组合, 从而求得择券期权的价值。该方法直接利用市场数据为择券期权定价, 主要优点在于可以规避定价模型选择错误或参数估计错误的模型风险; 另一特点则是直接通过市场数据考虑了市场摩擦的影响, 如买卖价差和借贷利差等; 但其前提条件是市场上应存在所需的利率衍生品, 并且其市场价格合理。由于尚无利率期权产品, 这一方法目前在中国暂时无法使用。

1.4 估计债券价格或利率的未来分布, 为择券期权和国债期货定价

我们将此类方法统称为“联合分布法”。由于择券期权的本质就是在到期时刻, 卖方在所有可交割券中选择最合算的债券进行交割的权利, 因此当其他相对简单的方法不可行或无法满足需求时, 最基本的定价思路就是通过假设债券价格或利率的联合分布来定价。具体又有 3 种做法:

(1) 假设所有可交割券价格服从某种联合随机过程

我们将此类方法称为“交换期权法”, 因为此类研究将国债期货中的择券期权视为一种多资产的交换期权, 通过假设所有可交割券的价格服从某种联合随机过程(多为联合几何布朗运动)来推导交换期权的定价公式, 主要文献包括 Margrabe^[7]、Gay 和 Manaster^[3]、Hemler^[1]等。只要假设几何布朗运动, 资产交换期权是有解析解的, 因此这种方法运用时相对简单; 但也存在着明显的缺点: 首先, 由于债券价格到期收敛于面值, 且可交割券的价格之间通常相关性较高, 简单假设它们服从联合几何布朗运动是不合理的, 而一旦不服从这一特定分布, 我们就难以得到解析解, 该方法就失去了优势; 其次, 该方法并没有其表面上看起来的那么简单易用: 国债期货的可交割券往往有 20 至 30 只, 这就意味着在估计联合随机过程的参数时需要估计一个庞大的方差协方差矩阵, 这是非常困难的; 另外, 虽然择券期权的价格有解析解, 但其中包含有一个和可交割券数量具有大体相同重数的复杂多重积分, 在实际运用中计算这个多重积分并不容易。针对后两个问题, 文献中一般采用的处理方法是在计算前首先对可交割券集进

行删减,仅选择数只最可能成为 CTD 券的债券进行计算,这种做法显然可能导致定价偏误。由于假设过于严格,此种方法目前已基本无人采用,本文也不拟使用这一方法。

(2) 假设无风险利率服从某种随机过程

我们将这种方法称为“动态利率模型法”,其基本做法是通过假设利率的随机过程,来推断期货到期时可交割券价格服从何种联合分布,以此为基础估计择券期权的价值,如早期的 Kane 和 Marcus^[8]、Ritchken^[9]、基于 Vasicek 模型的 Bick^[10]、基于 BDT (Black-Derman-Toy) 模型的 Rendleman^[11]、基于 HJM (Heath-Jarrow-Morton) 模型的 Nunes 和 Oliveira^[12]、Ritchken 和 Sankarasubramanian^[13] 以及 Lin 和 Paxson^[14]、采用特殊数值方法的 Ben-Abdallah、Ben-Ameur 和 Breton^[15],等等。

与“交换期权法”相比,“动态利率模型法”的主要优点是将大量可交割券的高维随机过程转变为瞬时利率或远期利率的低维随机过程,实现了“降维”,同时还避免了可交割券价格服从联合几何布朗运动这一不合理的假设。我们认为与其他为国债期货和择券期权定价的方法相比,从理论上说这一方法是相对最合理的,因此本文将主要采用这种方法为国债期货与择券期权定价。但“动态利率模型法”的主要缺点是较为复杂,而且其最终的准确性显然依赖于所选择的模型是否能够正确地捕捉利率变化的随机过程以及参数设定是否合理。因此需要对具体动态模型的准确性、合理性和可操作性加以权衡,进行选择。

经过权衡比较,本文拟采用改进的 BDT 方法为我国的国债期货与择券期权定价。主要原因是:一般认为,Vasicek 和 CIR 等均衡模型适于分析利率特征,而不适于定价;无套利的 HJM 模型等方法在国债期货中运用往往比较复杂,在目前固定收益资产种类偏少的中国市场上适用性仍不足。而 BDT 方法既属于无套利模型,适合用于定价;对参数和模型运用的要求又较低,可操作性强,可以在中国市场上采用;而且,BDT 模型假设瞬时利率对数的增量服从具有时变均值和时变方差的正态分布,而时变均值和时变方差则由市场真实数据校准得到,较好地保证了这一模型与现实的吻合。当然,由于发现直接运用原始 BDT 模型为国债期货和择券期权定价的精确性较低,我们对其进行了改进,具体将在第 2 部分阐述。

(3) 对债券到期收益率进行情景模拟

Burghardt 和 Belton 介绍了一种易于为实务界应用的“情景模拟法”^[16]。其基本思路是,事先根据经验设定未来可能的利率情景,推断其发生的概率,判断各种情景模拟下的可能 CTD 券,以此为依据来计算择券期权价值和国债期货价格。“情景模拟法”本质上就是对未来的联合分布进行人为设定,属于“联合分布法”的一种特例,其结果的准确性完全依赖于主观判断,本文不对此进行研究。

与国外研究相比,目前国内学者对择券期权定价的研究基本空白。就我们所知,只有曾耿明运用两维的“交换期权法”讨论了我国国债期货中的择券期权定价问题^[17],陈蓉和葛骏从理论上讨论了国债期货定价的基本原理以及准 CTD 券的选择问题^[18-19]。相比国债期货,目前国内的大部分研究仍关注股指期货和股指期货的定价等问题(如郑振龙和林璟^[20]、魏洁和韩立岩^[21]等)。

在对国外现有的定价方法进行深入比较分析之后,本文借鉴“隐含期权价值法”和“动态利率模型法”中的“BDT 模型”,提出了两种可操作的模型方法,为国债期货和择券期权定价,并深入考察了国债期货价格、择券期权价值与定价偏差在中国的基本特征和市场表现。

2 国债期货与择券期权定价模型

针对国债期货的产品特征和中国市场特点,本文提出两种模型方法为国债期货和择券期

权定价。方法一用改进的 BDT 树图直接确定含权的国债期货价格, 同时推得择券期权价值; 方法二则是先用“持有成本法”求得不考虑择券期权的国债期货价格, 再运用改进的 BDT 树图求出择券期权价值, 最终得到含权的国债期货价格。为充分说明两种定价方法, 我们先对相关概念作简要介绍, 再分别介绍本文提出的两种定价模型和方法。

2.1 基本概念

国债期货市场有两个重要惯例:

第一, 国债期货采用标准券净价报价, 其他可交割券均以交易所公布的转换因子进行转换。例如, 中金所的中期和长期国债期货的标准券分别是在期货到期月时剩余期限 5 年 (10 年)、票面利率 3% 的虚拟券。每个期货合约上市交易时, 中金所都会公布该合约的可交割券及其转换因子 (Conversion Factor, 以下用 CF 表示)。

第二, 与现券市场类似, 国债期货采用净价报价全价交割。也就是说, 在期货到期交割之前, 市场上报出的都是标准券期货净价; 而在国债期货到期交割的 T 时刻, 期货空方会选择最合算的 CTD 券交割, 全价交割意味着收到的金额为

$$Q_T \times CF_{CTD} + AI_{CTD,T},$$

其中 Q_T 表示 T 时刻国债期货的标准券期货净价是 CTD 券的转换因子, CF_{CTD} 表示 CTD 券在 T 时刻的应计利息 (中金所规定, 应计利息计算至交割流程中的配对缴款日)。

2.2 方法一: 直接定价法

2.2.1 基本定价框架

在方法一下, 我们用以下定价公式直接确定国债期货的标准券期货净价和择券期权价值:

在市场完美、市场完全和无套利条件下, 在 t 时刻, 含有择券期权的国债期货标准券净价的理论定价公式为

$$Q_t = \hat{E}_t \left(\min \left(\frac{P_{1,T}}{CF_1}, \frac{P_{2,T}}{CF_2}, \dots, \frac{P_{n,T}}{CF_n} \right) \right), \quad (1)$$

其中, Q_t 为 t 时刻国债期货的标准券期货净价, \hat{E}_t 表示 t 时刻风险中性测度下的条件期望, $P_{i,T}$ 为可交割券 i (共有 n 只) 在期货到期 T 时刻的现货净价, CF_i 则是可交割券 i 的转换因子。相应地, t 时刻可交割券 i 对应的择券期权价值为

$$f_{i,t} = \hat{E}_t \left(\frac{P_{i,T}}{CF_i} - \min \left(\frac{P_{1,T}}{CF_1}, \frac{P_{2,T}}{CF_2}, \dots, \frac{P_{n,T}}{CF_n} \right) \right). \quad (2)$$

注意由于已经考虑了净价和转换因子, 这是与国债期货标准券报价对应的择券期权价值。下面我们对此加以证明。

首先, 在期货到期 T 时刻, 期货空方将选择最合算的债券进行交割, T 时刻对空方而言最合算的债券就是 CTD 券。而在完美市场的假设下, 由无套利条件可知, 期货的多空双方交割所得必然相等, 即

$$Q_T \times CF_{CTD} + AI_{CTD,T} = P_{CTD,T} + AI_{CTD,T}.$$

否则可以进行套利。也就是说, T 时刻标准券期货净价收敛于 CTD 券现货经转换因子调整后的净价, 即

$$Q_T = \frac{P_{CTD,T}}{CF_{CTD}}. \quad (3)$$

其次, 作为空方最合算的债券, CTD 券一定是所有可交割券中 $\frac{P_T}{CF}$ 最小的, 即

$$\frac{P_{CTD,T}}{CF_{CTD}} = \min \left(\frac{P_{1,T}}{CF_1}, \frac{P_{2,T}}{CF_2}, \dots, \frac{P_{n,T}}{CF_n} \right), \quad (4)$$

这是因为若存在某可交割券 k 满足

$$\frac{P_{CTD,T}}{CF_{CTD}} > \frac{P_{k,T}}{CF_k}.$$

一定存在套利机会, 因为由式 (3) 有

$$Q_T > \frac{P_{k,T}}{CF_k},$$

和

$$Q_T \times CF_k + AI_{k,T} > P_{k,T} + AI_{k,T}.$$

这意味着投资者可以立即做空期货合约, 并在现货市场上买入现券 k 进行交割, 即可获得套利利润。满足无套利条件的市场不应出现此种情形, 由此式 (4) 得证。

结合式 (3) 和 (4), 可以得到

$$Q_T = \frac{P_{CTD,T}}{CF_{CTD}} = \min \left(\frac{P_{1,T}}{CF_1}, \frac{P_{2,T}}{CF_2}, \dots, \frac{P_{n,T}}{CF_n} \right). \quad (5)$$

第三, 根据等价鞅的基本原理, 在无套利和市场可复制的前提下, t 时刻的期货价格等于风险中性测度下 T 时刻期货价格的期望值 (可参见 Shreve^[22-23]), 即

$$Q_t = \hat{E}_t(Q_T) = \hat{E}_t \left(\min \left(\frac{P_{1,T}}{CF_1}, \frac{P_{2,T}}{CF_2}, \dots, \frac{P_{n,T}}{CF_n} \right) \right).$$

式 (1) 得证。

最后, 假设市场上存在单只可交割券 i 的期货合约, 则 t 时刻单只债券 i 的期货经过转换因子调整后的价格相当于只有一只可交割券的国债期货, 因此作为式 (1) 的特例, 有

$$Q_{i,t} = \hat{E}_t \left(\min \left(\frac{P_{i,T}}{CF_i} \right) \right) = \hat{E}_t \left(\frac{P_{i,T}}{CF_i} \right), \quad (6)$$

则式 (6) 和式 (1) 之差显然就是 T 时刻空方因具有选择 CTD 券交割的权利而导致的单只债券 i 的期货和国债期货之间的价值差异, 即 t 时刻可交割券 i 对应的择券期权价值, 有

$$f_{i,t} = \hat{E}_t \left(\frac{P_{i,T}}{CF_i} - \min \left(\frac{P_{i,T}}{CF_i} \right) \right).$$

式 (2) 也由此得证。

值得注意的是, 从上述定义来看, 每个可交割券都有相应的择券期权价值。但通常来说, 市场只关心那些未来可能成为 CTD 的债券的择券期权。当然, 只有在到期 T 时刻, 才能知道哪个券是 CTD 券; 在到期之前的 t 时刻, 哪个券是 CTD 券是无法预知的, 但市场会以当时的条件信息判断, 哪个券最可能成为未来的 CTD 券, 本文称之为 t 时刻的“准 CTD 券”(我们将在下文方法二中介绍如何在到期前判断“准 CTD 券”)。市场通常把 t 时刻的“准 CTD 券”对应的择券期权价值才叫做 t 时刻的“期权价值”, 而把其他债券对应的择券期权价值称为 t 时刻该券的“净基差”(Basis Net of Carry, BNOC)。

2.2.2 双树拼接的 BDT 模型

从上一节的定价框架可以看出, 国债期货与择券期权定价的核心在于确定风险中性期望 $\hat{E}_t(\min(\frac{P_{1,T}}{CF_1}, \frac{P_{2,T}}{CF_2}, \dots, \frac{P_{n,T}}{CF_n}))$, 因此需要对各可交割券在未来 T 时刻所服从的联合分布作出合理假设。本文采用改进的 BDT 模型来获得债券价格未来的联合分布, 进而为国债期货和择券期权定价。

BDT 模型是一种离散的无套利模型, 由 Black、Derman 和 Toy 提出^[24]。模型假设瞬时利率对数的增量服从具有时变均值和时变方差的正态分布, 得到风险中性测度下即期利率演化的树图, 由此为债券期权定价。该模型的无套利性质体现在其树图每一步的“时变均值”和“时变方差”需完全拟合当前市场的利率期限结构及波动率期限结构, 因而比均衡模型更适于定价。因其准确性和易用性, 该模型被业界广泛运用于利率衍生品的定价当中。

在国债期货定价方面, Rendleman^[11] 展示了使用原始 BDT 模型为一份假想的一年期美国国债期货合约定价的基本过程。但原始 BDT 模型能够准确进行定价的前提条件是, 被定价的债券的现金流时刻刚好全部位于利率树图的节点上。而在这份 Rendleman^[11] 假想的合约中, BDT 模型的树图间距为一个半月, 所有可交割券的到期日均为整数年, 因此所有可交割券的付息日以及国债期货的交割日均恰好落在树图的节点上。

但在为真实合约定价时, Rendleman^[11] 的方法实际上并不具有可操作性。如果树图的间距不是日, 一般情况下国债期货的实际交割日不会位于从定价日开始的树图的节点上, 而更改交割日将会影响定价的准确性。理论上将树图的间距设置成日能够解决上述问题。然而对于具体的合约, 以 2015 年修改后的 5 年期国债期货为例, 合约最长的到期期限为 1 年, 从期货的交割日开始, 可交割券最长的剩余期限为 5.25 年, 这就意味着能够为中国 5 年期国债期货定价的日间距树图大约为 2300 步, 而能够为 10 年期国债期货定价的树图则更加庞大。我们在用中国市场的利率数据实际构建此种树图时, 发现当步数超过 300 时, 树图利率较小的一侧几乎全部为 0。可能原因有二: 一是树图步数过多会使得充分扩散的利率在一定步数后较小的一侧无限接近于 0。二是树图间距过于密集易导致相邻阶利率的变化几乎为 0。而微小的利率和利率的微小变化均超过了计算机的计算精度而被忽略, 使得树图出现了大面积为 0 的现象。由于相当一部分贴现率被视为 0, 定价结果必然存在显著的误差。

Black 等^[24] 曾经提及, 如果日精度树图超出了计算机的计算和存储能力, 在实际运用中可以通过拼接“间距大时间长”和“间距小时间短”的两个树图来为债券期权定价。受这一思路启发, 本文通过拼接月间距和日间距的树图来为国债期货定价。双树拼接法有以下 4 个优点: 一是可以使得真实的期货交割日正好位于树图的节点上; 二是能比月间距树图更精确地捕捉微小的期权价值; 三是避免了日间距树图利率为 0 的现象; 四是大幅缩短了计算时间, 仅为使用日间距树图的六分之一。

表 1 示例合约的可交割券集

国债	剩余期限	票面利率	付息频率	转换因子 (一年期合约)	转换因子 (半年期合约)
A	7 年	6%	1 年 1 次	1.1625	1.1747
B	5 年	2%	1 年 1 次	0.9628	0.9585

下面我们以一个简单示例说明双树拼接定价的基本原理。树图模型的基本假设为市场完美, 远期与期货无差异, 所有交易者都在交割月的同一天进行交割 (这些假设与现实比较接近, 属于可接受的假设)。为专注说明核心机理, 在本示例中进一步假设市场无风险利率期限结构水平, 半年计息一次的利率为 4%, 波动率期限结构也为水平, 半年期波动率为 30%。假设的

定价对象分别为一份 1 年后到期和一份 0.5 年后到期的国债期货合约, 这两个合约均只有两个可交割券 A 和 B, 具体如表 1 所示。

如果为 1 年后到期的国债期货合约定价, 使用步长为 1 年的年间距树图即可。原始 BDT 树图的基本构造和定价原理可参见 Black 等^[24] 以及陈蓉和郑振龙^[25], 本文就不再赘述。这里的基本流程为: 根据原始 BDT 模型, 输入 t 时刻市场上的利率期限结构和波动率期限结构, 可以构造出风险中性测度下 7 步的 1 年期利率树图, A 券在第 7 年所有节点的价值均为 100 元, B 券则在第 5 年所有节点的价值均为 100 元, 然后分别逐步贴现倒推, 再减去应计利息, 可以得到 1 年后 A 券和 B 券净价的风险中性分布 (如图 1 中的大树图所示), 并在大树图 1 年处各节点比较经转换因子调整后的 A 券和 B 券净价的大小, 就可以确定标准券期货的净价与各券对应的择券期权价值了。

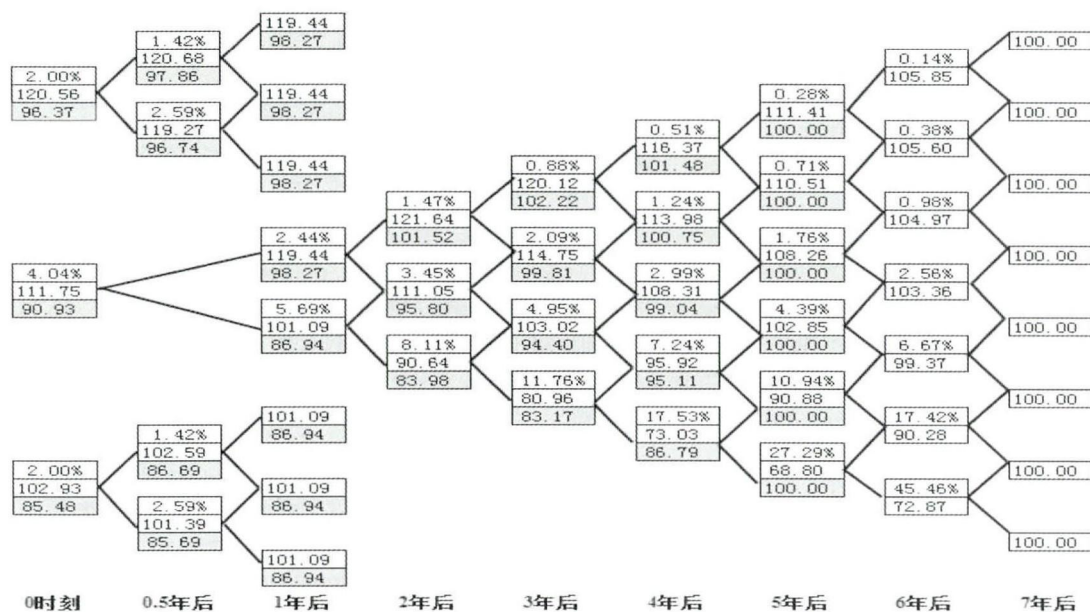


图 1 双树拼接示例

注: 树图在 s 时刻的节点, 表示为 (s, j) , 从下至上 $j = 0, 1, 2, \dots$ 。大树图上每个节点的第一行为无风险 1 年期利率, 第二行和第三行分别为 A 券和 B 券现货净价, 小树图 t 时刻和 0.5 年时刻的节点的第一行为无风险 0.5 年期利率, 第二行和第三行分别为 A 券和 B 券现货净价, 1 时刻节点的第一行和第二行分别为 A 券和 B 券现货净价。注意 BDT 模型定价时无风险利率的树图比债券净价的树图要少一步, 因此大树和小树图的最后一列均只有债券净价, 而没有无风险利率。

然而, 如果为 0.5 年后到期的国债期货合约定价, 年间距树图就不再适用了: 国债期货的交割日并没有落在大树图的任何节点上, 因此需要采用双树拼接的方法。如图 1 中的两个小树图所示: 拼接时刻为期货到期日后的下一时刻 (在本示例的大树中, 到期日 0.5 年后的下一个时刻为 1 年)。拼接的方法是:

(一) 在当前时刻到拼接时刻之间构建 m 个 0.5 年间距的小树图 (m 为拼接时刻的节点数, 在本示例中 1 年时刻有 2 个节点, 因此 $m = 2$)。

(二) 对于某只特定的可交割券, 令各小树图在拼接时刻所有节点的净价都相等, 均分别等于大树图在拼接时刻的某个节点值: 如图 1 所示, 上方小树图的 1 年时刻所有节点的净价都等于大树图 1 年时刻上方节点 (用节点 (1,1) 表示) 的值, 下方小树图的 1 年时刻所有节点

的净价都等于大树图 1 年时刻下方节点的值 (用 (1,0) 表示)。

(三) 根据市场无风险利率期限结构与波动率期限结构求出期货合约到期时刻 (本例中为 0.5 年) 的各个节点值。

在构造出拼接的树图之后, 就可以通过逐步倒推的方法, 得到半年后 A 券和 B 券净价的可能分布, 从而相应地确定半年期货合约的标准券期货净价与各券对应的择券期权价值。表 2 列出了与图 1 相对应的在树图 0.5 年处, 两只可交割券经转换因子调整后的净价的联合分布情况。

表 2 半年期示例合约可交割券净价的联合分布

树图拼接点	0.5 年小树图节点	$(P_{A,0.5}, P_{B,0.5})$	$(\frac{P_{A,0.5}}{CF_{A,0.5}}, \frac{P_{B,0.5}}{CF_{B,0.5}})$	CTD 券	风险中性概率
(1,1)	(0.5, 3)	(120.68, 97.86)	(102.73, 102.10)	B	0.25
	(0.5, 2)	(119.27, 96.74)	(101.53, 100.93)	B	0.25
(1,0)	(0.5, 1)	(102.59, 86.69)	(87.34, 90.45)	A	0.25
	(0.5, 0)	(101.39, 85.69)	(86.31, 89.41)	A	0.25

注: BDT 树图的每个二项分支概率均为 0.5。

在得到交割时刻的联合分布之后, 由式 (1) 可知, 对于半年期国债期货, t 时刻的标准券期货净价为

$$Q_t = (102.10 + 100.93 + 87.34 + 86.31) \times 0.25 = 94.17.$$

由式 (2) 可知, 可交割券 A 的择券期权价值则为

$$f_{A,t} = (102.73 + 101.53 + 87.34 + 86.31) \times 0.25 - 94.17 = 0.31.$$

可交割券 B 的择券期权价值为

$$f_{B,t} = (102.10 + 100.93 + 90.45 + 89.41) \times 0.25 - 94.17 = 1.57.$$

以上仅为示例。由于目前新版中国国债期货最长的合约 9 个月, 为了覆盖整个可能定价区域, 在接下来的实证研究中, 我们使用了时间间隔为月、时间跨度为 8 年的大树和时间间隔为日、最大时间跨度约为 240 天, 随实际定价日而变化的利率小树, 以实现双树拼接。

2.3 方法二: 两步定价法

与方法一直接通过树图估计得到国债期货价格和择券期权价值不同, 方法二可以描述为“两步法”: 先运用“持有成本法”求得不考虑择券期权的国债期货价格, 再运用改进的 BDT 树图求出择券期权价值, 最终得到含权的国债期货价格。

2.3.1 持有成本法: 不考虑择券期权

在不考虑择券期权的情况下, 与其他期货一样, 国债期货可以用“持有成本法”定价, 用连续复利表示为

$$F_{i,t} = (P_{i,t} + AI_{i,t} - I_{i,t})e^{r_t(T-t)}, \quad (7)$$

其中, t 和 T 分别为定价时刻和国债期货到期时刻, $P_{i,t}$ 、 $AI_{i,t}$ 和 $F_{i,t}$ 分别为 t 时刻的可交割券 i 现券净价、应计利息和期货全价, $I_{i,t}$ 为国债期货剩余期限内现券 i 所付票息的现值, r_t 为 t 到 T 的无风险利率。

当然, 国债期货合约的特殊设定和债券市场的一些特殊惯例使得国债期货的定价略为复杂, 主要包括以下步骤:

步骤 1 确定“准 CTD 券”

在运用持有成本法为国债期货定价时,其主要难点在于:由于可交割券不止一种,式(1)中的 $P_{i,t}$ 应该选用哪个券的现货价格呢?显然,作为会被卖方选中交割的债券,应选择 CTD 券在 t 时刻的净价作为 $P_{i,t}$ 。问题在于,只有在到期 T 时刻,才能知道哪个券是 CTD 券;在到期之前,无人可以预知。因此,在到期之前的 t 时刻,人们只能退而求其次,选择当时的信息条件下最可能成为未来的 CTD 券的“准 CTD 券”作为定价基准。

一般公认,给定时刻 IRR (Implied Repo Rate, 隐含回购利率) 最大的券就是当时条件信息下的最合算债券。如果忽略期货剩余期限内债券所付的票息,IRR 被定义为

$$IRR_{i,t} = \frac{t \text{ 时刻约定的期货全价} - t \text{ 时刻现货全价}}{t \text{ 时刻现货全价}} \times \frac{365}{T-t}.$$

可以看出,对期货空方来说,IRR 最大意味着在 t 时刻购买该现券,并通过期货锁定未来卖价,所能获得的确定年化收益率最大,从而是 t 时刻条件信息下的最合算债券。当然,不同时刻,IRR 最大的券可能不同,会导致 $P_{i,t}$ 变化,从而带来国债期货价格的变化。可以看出,如果 IRR 高于投资者的资金成本,就可能存在套利机会。在无套利情况下,IRR 应等于资金成本。由于金融机构的短期资金成本多为回购利率,IRR (隐含回购利率) 因此而得名。需要说明的是,上述忽略票息的 IRR 公式仅为说明简便起见,在本文实证部分,使用考虑了票息的 IRR 公式来确定“准 CTD 券”。

但在中国市场上,由于国债现券缺乏流动性,当日 IRR 最大的债券不一定能买到,或不一定能按市场价格成交。因此,本文采用 IRR 与流动性指标相结合的标准:每日计算得到当日 IRR 最大且确实有成交的可交割券,并根据实际市场的流动性在一定程度上进行必要的调整,由此决定当日的“准 CTD 券”,以保持与真实市场一致。

步骤 2 运用持有成本法计算国债期货全价 $F_{i,t}$

确定 $P_{i,t}$ 之后,就可以运用式(7),根据“准 CTD 券”在国债期货剩余期限内的付息情况 and 无风险利率计算得到国债期货全价。这一过程与其他期货定价类似,就不再赘述。

步骤 3 确定不含权的国债期货报价

由于国债期货市场使用标准券净价报价,步骤 2 计算得到的期货全价 $F_{i,t}$ 并非最后使用的期货价格,而是需要再减去“准 CTD 券”在期货交割日的应计利息 $AI_{\text{准 CTD},T}$ 得到净价,再除以该券的转换因子 $CF_{\text{准 CTD}}$,得到对应的标准券期货净价,就是不含权的国债期货报价 Q_t^* ,用公式可以表示为

$$Q_t^* = \frac{F_{\text{准 CTD},T} - AI_{\text{准 CTD},T}}{CF_{\text{准 CTD}}}. \quad (8)$$

总之,在不考虑择券期权价值时,国债期货定价的基本流程是:首先确定当前信息条件下的“准 CTD 券”,并以此作为定价基准;接下来完成三个变换:从现货到期货(基于持有成本模型)、从全价到净价(扣减交割日的应计利息)、从真实券到标准券(除以转换因子)。最终在交易中使用的是标准券期货净价。

2.3.2 “准 CTD 券”的择券期权定价

在计算出不含权的国债期货价格之后,需要估计 t 时刻的“准 CTD 券”对应的择券期权价值,即 T 时刻被其他更合算债券取代而给期货空方带来的价值。我们提出如下公式:

在市场可复制和无套利的前提下, 我们有

$$f_{\text{准CTD},t} = \frac{1}{CF_{\text{准CTD}}} \hat{E}_t \left(P_{\text{准CTD},T} - \frac{P_{\text{CTD},T}}{CF_{\text{CTD}}} \times CF_{\text{准CTD}} \right), \quad (9)$$

其中 $f_{\text{准CTD},t}$ 表示给定时刻“准CTD券”的择券期权价值, \hat{E}_t 表示 t 时刻风险中性测度下的条件期望, $P_{\text{准CTD},T}$ 和 $CF_{\text{准CTD}}$ 为“准CTD券”在期货到期 T 时刻的现货净价和转换因子, $P_{\text{CTD},T}$ 和 CF_{CTD} 则为真实的CTD券在期货到期 T 时刻的现货净价和转换因子。

下面我们对式(9)加以证明。

如果期货到期 T 时期货空方仍然选择 t 时刻的“准CTD券”交割, 其交割收益为

$$(Q_T \times CF_{\text{准CTD}} + AI_{\text{准CTD},T}) - (P_{\text{准CTD},T} + AI_{\text{准CTD},T}),$$

其中 AI 表示给定债券在给定时刻的应计利息。但理性的期货空方会选择 T 时刻的真实CTD券交割, 其交割收益更高, 为

$$(Q_T \times CF_{\text{CTD}} + AI_{\text{CTD},T}) - (P_{\text{CTD},T} + AI_{\text{CTD},T}).$$

也就是说, 择券期权给期货空方带来的到期回报是这两者之差, 即

$$(Q_T \times CF_{\text{CTD}} - P_{\text{CTD},T}) - (Q_T \times CF_{\text{准CTD}} - P_{\text{准CTD},T}).$$

将式(3)代入可知, 择券期权在 T 时刻给期货空方带来的到期回报是

$$P_{\text{准CTD},T} - \frac{P_{\text{CTD},T}}{CF_{\text{CTD}}} \times CF_{\text{准CTD}}.$$

在市场可复制和无套利的前提下, 运用风险中性定价原理, 再经过转换因子的调整, 可以得到择券期权在 t 时刻与标准券期货报价相应的价值等于

$$f_{\text{准CTD},T} = \frac{1}{CF_{\text{准CTD}}} \hat{E}_t \left(P_{\text{准CTD},T} - \frac{P_{\text{CTD},T}}{CF_{\text{CTD}}} \times CF_{\text{准CTD}} \right).$$

式(9)得证。

可以看到, “准CTD券”择券期权定价的核心也在于计算风险中性期望。运用前述的双树拼接的BDT模型, 就可以获得 T 时刻的债券价格风险中性分布信息, 从而估计出该风险中性期望, 得到“准CTD券”的择券期权价值。由于基本方法相似, 具体过程就不再赘述。

2.3.3 含权的国债期货价格

在估计得到“准CTD券”的择券期权价值之后, 只要在式(8)不含权的标准券期货净价的基础上再减去择券期权 $f_{\text{准CTD},t}$ 的价值即可。用公式可以表示为

$$Q_t = Q_t^* - f_{\text{准CTD},T} = \frac{F_{\text{准CTD},T} - AI_{\text{准CTD},T}}{CF_{\text{准CTD}}} - f_{\text{准CTD},T}. \quad (10)$$

3 实证研究

3.1 实证数据

本文以TF1403合约作为实证对象, 即2013年9月6日在中金所上市交易, 2014年3月14日到期的5年期国债期货合约, 该合约共有26只可交割券, 其中在期货9月6日上市之后新

发行的可交割券有 4 只,在实际定价时,新发行券将在各自的发行日加入可交割券集。尽管进入 3 月之后,在最后交易日(3 月 14 日)前的每个工作日都可以交割,但实际中一般选择最后交割,加上本文不考虑择时期权,因此文中定价时假设最后集中交割。

本文所使用的数据来源于同花顺 iFinD 金融数据终端和 Wind 资讯金融终端,数据频率均为日。其中,国债期货价格数据的时间区间为 2013 年 9 月 6 日至 2014 年 3 月 14 日,共 123 个交易日,所使用的可交割券现券数据的时间区间和国债期货相同(国债现货价格明显不合理的数个异常点被剔除),无风险利率期限结构数据则借鉴市场习惯,由三个部分拼接而成:1 个月以内(含 1 个月)的数据为银行间质押式回购利率,1 个月到 6 个月的利率为 FR007 互换利率,6 个月以上则采用中债登的银行间固定利率国债即期收益率,数据时间区间为 2012 年 9 月 6 日至 2014 年 3 月 14 日。

需要说明的是,每天无风险利率原始数据的期限范围为 0.0 年到 8.1 年,间隔为 0.1 年。而在构建 BDT 树图时,需要特定时间点和按照特定频率间隔分割的利率期限结构,原始数据无法直接与之匹配。因此需要在原始数据的基础上进行插值,以补足因为非交易日所造成的数据缺失以及期限结构上所需的特定期限的数据点。由于无论是在横向的期限结构还是在纵向的时间序列上,原始数据点都较为密集,我们在对比了线性插值和样条插值之后,发现线性插值能够更好地反映利率期限结构的变化趋势,而样条插值则会造成过度拟合。因此对整个利率期限结构均使用线性插值方法。

本文对即期利率的波动率期限结构的估计则采用 Black 等^[24]的方法,通过估计历史即期利率对数差分的标准差来完成。每次估计时使用从当日开始过去一年的数据,按日滚动,数据频率与树图间隔相同。例如为了获得 2013 年 9 月 6 日的 BDT 日间隔树图所需的波动率期限结构,使用的是 2012 年 9 月 6 日到 2013 年 9 月 6 日的日频率利率期限结构数据。

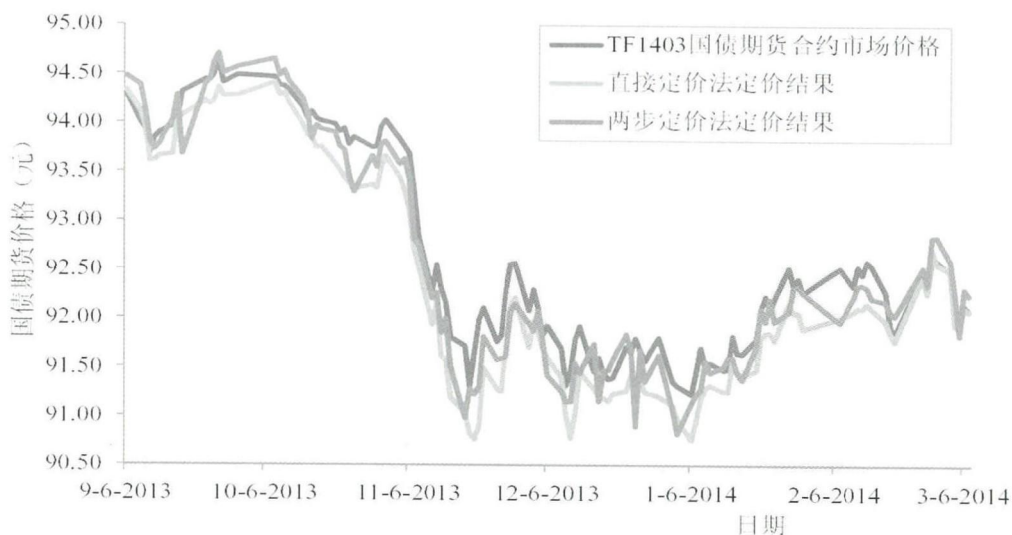


图 2 TF1403 国债期货合约的市场价格和模型价格对比

3.2 实证结果

3.2.1 国债期货定价结果分析

图 2 展示了 TF1403 合约上市交易期间的定价结果。曲线颜色由深入浅依次为真实市场价格、直接定价法(方法一)的理论定价结果和两步定价法(方法二)的理论定价结果。

从图 2 中可以观察到三个重要的现象:

(一) TF1403 国债期货市场价格和两个模型价格的整体变化趋势的一致性很高, 这说明本文所提出的理论模型和定价算法基本是正确的;

(二) 大多时候市场价格都高于两个模型的定价结果, 这意味着市场交易者常常低估择券期权的价值, 这与我们在市场中观察到的现象是一致的: 由于国债期货刚刚推出, 市场交易者对其还不太熟悉, 加上样本期内市场的 5 年期到期收益率一直高于标准券的票面利率 3%, 并相对稳定在 4% 上下, 这使得 CTD 换券的可能性很小, 从大量业界研究报告来看, 在 TF1403 存续期间, 市场在为国债期货定价时一般未考虑择券期权的价值;

(三) 相比而言, “直接定价法”的定价结果与真实市场价格的整体同步性更强, 但比市场价格存在一个整体的下移; 而“两步定价法”的定价结果与真实市场价格相差较小, 但与市场价格的同步性略差。

表 3 报告了 TF1403 国债期货市场价格、理论价格和定价差异的一些基本统计性质, 进一步证实了以上观察。

表 3 TF1403 国债期货市场价格、理论价格和定价差异的基本统计性质

定价方法	日均值 (元)	日标准差 (元)
TF1403 国债期货市场价格	92.63	1.04
“直接定价法”定价结果	92.32	1.11
“两步定价法”定价结果	92.51	1.12
“直接定价法”定价差异	-0.31	0.21
“两步定价法”定价差异	-0.12	0.25

可以看到, 在 TF1403 合约存续期内, “两步定价法”的定价结果比真实市场价格平均低 0.12 元, 远小于“直接定价法”的 -0.31 元误差。这说明从整体来看, 对持有成本法定价结果进行择券期权价值调整的“两步定价法”与市场更为接近。再看标准差, 两个模型定价差异的标准差几乎相同。这是否意味着“两步定价法”更好呢? 并不尽然。我们将国债期货价格的真实收益率对两个模型的理论收益率进行了回归, 结果发现“直接定价法”的拟合优度 R^2 为 0.5601, 远高于“两步定价法”的拟合优度 0.1143, 这说明在与市场价格的同步性上, 直接采用双树拼接树图的“直接定价法”却又较优, 或者说, 该方法的定价结果更为稳定。

总之, 从国债期货定价结果来看, 我们认为本文提出的两种定价方法基本上是合理的, 两种方法各有长短, 我们将在下文对此进行深入的分析。此外, 由于样本期内的市场环境决定了换券的可能性较低, 加上择券期权定价较难, 市场参与者在实际交易 TF1403 时较少考虑择券期权的价值。

3.2.2 择券期权定价结果分析

如前所述, 在期货到期前的任意时刻 t , 对于每一只可交割券, 都可以计算出与此券对应的择券期权, 但通常人们所说的择券期权一般是特指 t 时刻“准 CTD 券”所对应的择券期权。

我们首先对样本期内每日“准 CTD 券”所对应的择券期权价值进行考察。图 3 展示了 TF1403 存续期间, 每天的“准 CTD 券”的择券期权市场隐含价值 (深色线) 和理论价值 (浅色线)。其中, 择券期权市场隐含价值运用文献综述中提及的“隐含择券期权价值法”计算得到, 等于国债期货市场价格与持有成本法定价结果之差; 而关于择券期权理论价值, 由于都使用同样的树图定价, “直接定价法”和“两步定价法”定出的择券期权价值实际上是相等的, 因此在图 3 中只有一条浅色线。

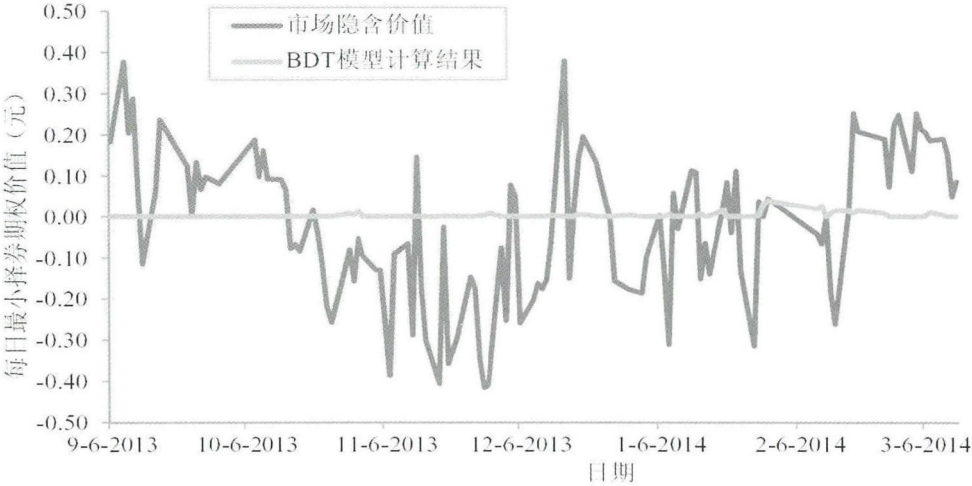


图 3 TF1403 准 CTD 券择券期权市场隐含价值和理论价值对比

从图 3 中我们发现：

- (一) 从大小来看，TF1403 的准 CTD 券的择券期权理论价值平均大约等于 0.0025 元，市场隐含择券期权价值均值等于 -0.0237 元，这说明与国外相比，无论从理论还是现实来看，在 TF1403 存续期间，择券期权对国债期货价格的影响很小，几乎可以忽略不计。
- (二) 对比准 CTD 券择券期权的理论价值与市场隐含价值，在 TF1403 存续期间，市场在一定程度上仍然低估了择券期权价值。
- (三) 市场隐含的择券期权价值的波动性显然远大于理论价值，其取值的合理性也存在问题，常常出现为负的择券期权价值。这就是我们在文献综述部分谈到的“隐含期权价值法”的一个重要缺陷：该方法计算得到的择券期权价值很可能包含着定价偏误等噪音，并不完全是择券期权价值。
- (四) 从时间序列来看，市场隐含择券期权价值在 TF1403 合约上市交易的初期较高并为正值，之后逐渐下降并基本保持在负值，直到交割日前一个月开始上升并最终向 0 收敛。而理论择券期权价值除了在某些时刻有极小的波动以外，在整个时间序列上基本保持为 0。这说明了市场倾向在国债期货的存续期初和期末高估，而在期中低估择券期权的价值。

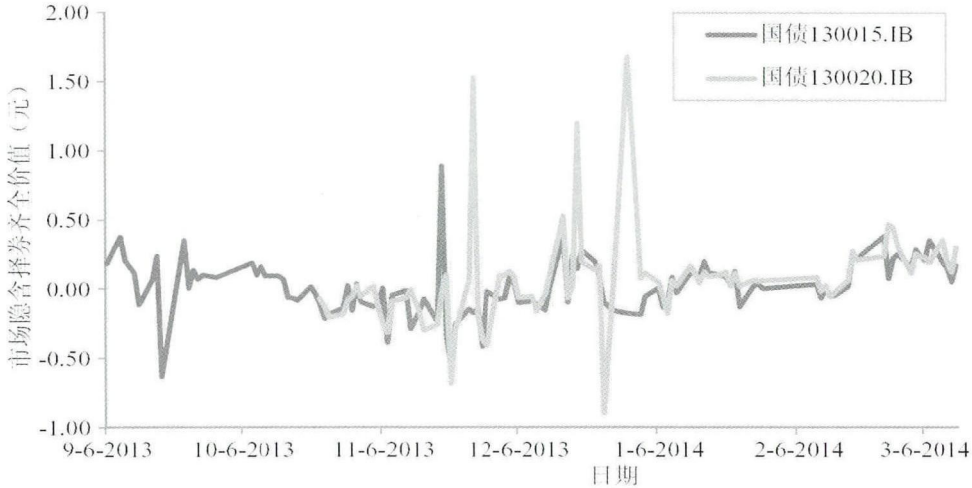


图 4 TF1403 主要准 CTD 券的市场隐含择券期权价值对比

在 TF1403 合约存续期内, 我们的模型筛选出的 CTD 候选券有两只, 债券 130015.IB 和 130020.IB。我们发现, 这与业界分析报告和实际交易是一致的, 在 TF1403 合约中, 市场交易、定价和交割也主要是围绕这两个现券展开的。因此接下来, 我们讨论这两只券的择券期权价值在时间上的变化规律, 以考察在 TF1403 国债期货合约存续期内准 CTD 券的变化。

图 4 和图 5 分别展示了样本期内 130015.IB 和 130020.IB 择券期权的市场隐含价值和理论价值, 其中深色线和浅色线分别代表 130015.IB 和 130020.IB。表 4 则报告了这两个券择券期权定价结果的一些基本统计性质。

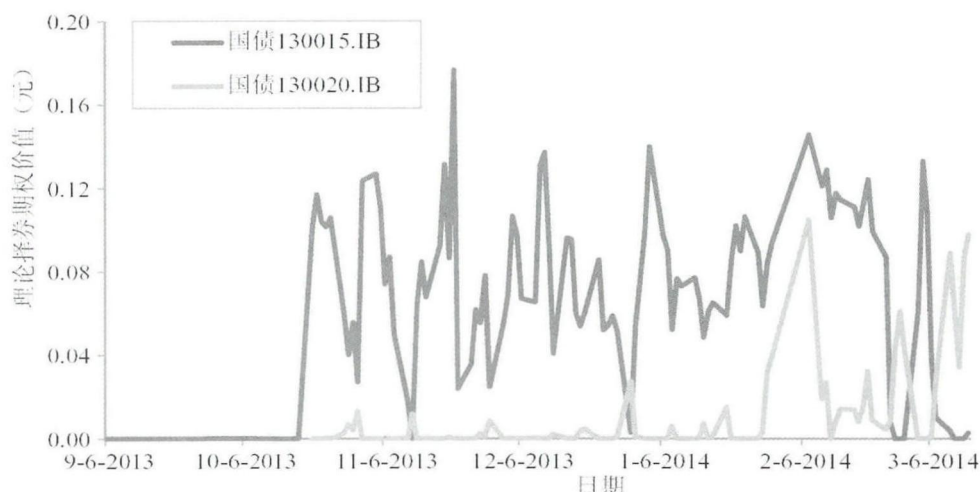


图 5 TF1403 主要准 CTD 券的理论择券期权价值对比

表 4 TF1403 主要准 CTD 券择券期权价值定价结果的基本统计性质

期权价值	可交割券	日均值 (元)	日标准差 (元)
市场隐含择券期权价值	130015.IB	0.0175	0.2009
	130020.IB	0.0650	0.3449
理论择券期权价值	130015.IB	0.0596	0.0102
	130020.IB	0.0464	0.0217

注: 由于 130020.IB 的发行日是在国债期货上市交易之后, 其的时间序列比 130015.IB 短, 因此表中两者的对应值不具有可比性。

可以看到, 从理论价值上看, 从 2013 年 9 月 6 日 TF1403 国债期货开始交易起, 到 2013 年 10 月 21 日新可交割券 130020.IB 发行为止, 130015.IB 的择券期权价值一直保持着趋近于 0 的状态, 这说明 130015.IB 是此时间区间内的准 CTD 券。但从 130020.IB 发行之日起, 130015.IB 的择券期权价值开始显著上升。取而代之的是 130020.IB, 从其实际交易的第一天 2013 年 10 月 23 日开始直至 2014 年 3 月 10 日 TF1403 国债期货交易临近结束为止, 除了极个别日期以外, 其的择券期权价值都一直保持在 0 左右。双树拼接 BDT 模型的定价结果非常清晰地展示了以 2013 年 10 月 21 日 130020.IB 的发行日为分界点, 理论准 CTD 券由 130015.IB 向 130020.IB 转变的整个过程。其中特别需要说明的是在 2014 年 3 月 11 日, 利率期限结构发生了一定程度的旋转, 短端有较大幅度的下移而长端略微上扬, 这使得息票率较低的 130015.IB 反而比 130020.IB 更便宜, 因此两者择券期权价值的相对大小发生逆转。

但是从市场隐含的择券期权价值来看, 在 130020.IB 的发行日之后, 130015.IB 和 130020.IB 的择券期权价值均随时间的推移处于振动的状态, 并没有存在类似模型定价结果所展示出的明显的换券过程。事实上每日 IRR 的计算结果也表明, 从 130020.IB 开始实际上市交易, 直到

国债期货交易结束为止的所有交易日中, 130015.IB 和 130020.IB 相互交替地成为准 CTD 券。在 TF1403 国债期货的整个交易过程中, 130015.IB 和 130020.IB 事实上均被市场视为可能用于最终交割的潜在 CTD 券, 在此期间内一方并不比另一方具有明显的优势。这说明了市场可能整体存在一定的惯性, 或存在一定的换券成本, 或不同市场的参与者对可交割券存在不同的偏好, 这使得市场不会轻易改变对 CTD 券的预判, 也就是说, 市场在准 CTD 券的选择上并不完全是理性的。

3.2.3 定价模型差异的深入讨论

从上一节中我们可以看到, 在为择券期权定价时, 本文所提出的两种模型得到的结果是一致的, 那么为什么在为整个国债期货理论定价时, 两种模型存在差异呢? 这两种国债期货定价方法的本质区别在于所使用的信息集不同。在为择券期权定价时, 两种方法使用的都是无风险利率曲线所构造的利率树图, 相同的信息集使得定价结果是一致的; 但在为国债期货的不含权部分定价时, “直接定价法” 仍然使用了市场无风险利率期限结构信息构造的树图, 而“两步定价法” 则直接使用市场中的现券价格信息通过持有成本模型进行定价。由于无风险利率期限结构是不可直接观测的, 只能从现券价格中拟合得到。在理论上, 这两者的信息含量是相同的。但在实际中, 要从有限的现券价格中拟合得到包含无数点的整条利率期限结构, 拟合误差是不可避免的, 不同的拟合方法也会得到不同的利率期限结构。尽管本文使用的是市场中最为权威的中央国债登记结算有限责任公司所提供的利率期限结构, 但其与现券价格信息仍然存在着差异, 从而导致了两种定价方法的差异。

由于在定价时仅使用无风险利率期限结构的信息, “直接定价法” 对所使用的市场无风险利率期限结构的数据要求很高, 需要其能够反映市场真实的无风险利率水平, 但这在很多情况下, 特别目前在中国市场上是难以实现的。中国市场的现实状况是债券数量仍不够多, 交易也不够活跃, 这使得每天从市场上拟合得到的无风险利率期限结构常存在较大的误差, 即使直接用它为国债现货价格定价可能都不太准确。用这样的输入信息来为国债期货定价, 定价结果自然比较容易偏离国债期货的市场价格。从图 2 和表 3 中可以看到, “直接定价法” 的模型价格和真实市场价格相比确实存在平均约 0.37 元的下移。

由于国债期货的价格可以分解为不含期权的期货价值和择券期权价值两个部分, 在到期前, 国债期货的价格一般是追随着未来可能被交割的潜在 CTD 券进行变动, 因此“两步定价法” 的本质就是直接引入“准 CTD 券” 的价格信息, 运用持有成本法对国债期货中的不含权部分进行定价, 以避免因市场无风险利率期限结构和现券真实价格不一致而导致的国债期货的定价偏误。但这种方法的准确性在很大程度上依赖于所使用的“准 CTD 券” 价格的合理性。如果确定的“准 CTD 券” 和市场实际认为的潜在 CTD 券不一致或是“准 CTD 券” 价格不合理, 也有可能最终导致定价结果不准确。

那么, 哪一个方法更好呢? 我们认为两者各有利弊。尽管可能不够准确, 但整条利率期限结构可以视为整个债券市场所有现券价格的综合反映, 因此较为稳定, 极个别现券价格的不合理不会使其整体形状产生非常大的变化, 这使得长期来看“直接定价法” 的定价结果与市场的同步性相对稳定。相对地, 单只债券的现券价格在其理论价格的基础上还要受到现券市场的流动性、供求关系以及可能存在的人为因素的影响, 这些因素中任意一个的变化都有可能导出现券价格出现波动。这就使得“两步定价法” 的定价结果在整体上可能更贴近于国债期货的市场价格, 但长期来看其与市场价格的同步性较差。图 2 和表 3 十分清晰地展示了这一区别。

因此本文所提出的两种定价方法很难说有严格的优劣之分, 而应视市场的实际情况以及

可以获得信息的准确性来进行选择。当市场上存在一个被广泛接受的无风险利率期限结构时, 可以直接使用双树拼接 BDT 模型, 即“直接定价法”来对国债期货进行定价。当市场上对“准 CTD 券”有很大的共识, 并且此券当前市场价格基本合理时, 则可以用经择券期权调整的持有成本模型, 即“两步定价法”来定价。因此, 在实际中应根据市场状况综合使用两种定价方法。

4 稳健性检验

本节将使用 T1603 国债期货合约对本文提出的两种定价模型进行稳健性检验。T1603 合约和前文的 TF1403 合约存在不少差异: 首先, T1603 是长期 (10 年期) 国债期货合约, 我国目前只有中期和长期国债期货, 前文已经对中期国债期货进行了实证检验, 稳健性检验选择长期合约显然是合适的; 其次, T1603 合约到期日为 2016 年 3 月, 样本涵盖时间也与 TF1403 不同; 第三, T1603 合约上市交易时, 中金所对国债期货的交易和交割制度均进行了调整, 其保证金、价格最大波动限制、最小变动价位和交割模式等均与前文考察的 TF1403 有所不同。在这个部分, 我们考察在这些制度性调整 and 不同样本期下, 对不同期限的国债期货, 本文提出的定价模型是否仍能发挥作用。

T1603 的合约到期日为 2016 年 3 月 11 日, 对应的可交割国债为“合约到期月份首日剩余期限为 6.5-10.25 年的记账式附息国债”, 到交割日为止满足这一条件的可交割国债共有 15 只, 期初的可交割国债为 10 只, 另外 5 只为在期货存续期内新发行的国债。

表 5 报告了 T1603 国债期货从 2015 年 9 月 14 日成为市场次主力合约开始到交割日为止, 市场价格、理论价格和定价差异的基本情况。

表 5 T1603 国债期货市场价格、理论价格和定价差异的基本统计性质

定价方法	日均值 (元)	日标准差 (元)
T1603 国债期货市场价格	99.14	1.27
“直接定价法”定价结果	99.52	1.28
“两步定价法”定价结果	99.31	1.25
“直接定价法”定价差异	0.38	0.27
“两步定价法”定价差异	0.17	0.27

可以看到, 对于 T1603 国债期货来说, 整体而言两个定价模型和市场价格仍然具有较高的一致性, 直接定价法和两步定价法与市场价格的均差分别为 0.38 元和 0.17 元, 两者日均差的标准差也相对较小, 这充分说明本文所提出的两种定价模型是稳健的, 同时适合于中期和长期国债期货, 交易所的制度微调对其也没有本质性的影响。在两个定价模型中, 依然是“两步法”的结果更接近于市场真实价格, 但“直接定价法”的定价结果与真实市场价格的整体同步性更强, 理论收益率与真实价格收益率的拟合优度为 0.3276, 而“两步法”的拟合优度仅为 0.0972。

但与前述实证结果不同的是, 在前文的 TF1403 存续期间, 国债期货的理论价格总体而言低于市场价格, 这意味着市场对其中的择券期权定价较低; 但 T1603 则呈现不同的特征, 从表 5 可以看到, 国债期货的理论价格总体来说高于市场价格, 这意味着市场对择券期权的定价较高。这也与样本期的实际情况是吻合的。在 T1603 存续期间, 特别是 2015 年 9 月以后, 中国的 6-10 年期国债利率急速下行, 并于 2015 年 12 月 17 日首次越过 3%, 下挫至 2.7% 附近, 而后在 T1603 快到期时又回到 3% 附近。由于 3% 是即国债期货标准券的票面利率和转换因子的

计算基准,债券利率在3%附近振荡会导致CTD券的变化,择券期权价值自然上升。从定价结果来看,在换券可能性较大的情况下,市场对择券期权的定价显然较高,超过了理论价值。

在T1603合约存续期内,我们的模型筛选出的CTD候选券有三只,分别是国债150016.IB、150023.IB和150026.IB。图6展示了这三只债券的理论择券期权价值对比,期权价值低者是理论上的准CTD券。从理论计算来看,早期后两个债券尚未发行时,150016.IB是准CTD券,2015年10月21日150023.IB上市交易后,和150016.IB交替成为准CTD券;150026.IB尽管在2015年10月28日就已上市交易,但直到12月20日之后才成为准CTD券;最后在T1603合约快到到期时,150026.IB的期权价值有所上扬,但最终还是保持了其准CTD券的地位。

这个结果与市场利率的走势是吻合的。2015年12月17日之前,市场利率高于3%,债券期限越长,越容易成为准CTD券,前两只债券(150016.IB和150023.IB)都是2015年发行的10年期左右的新券,期限长且流动性好,因此两者交替成为准CTD券是合理的;2015年12月17日,市场利率首次下破3%,之后逐渐稳定在3%以下,此时短期限的新券容易成为准CTD券,第三只债券(150026.IB)正是剩余期限6年多的短期新券,在市场确认利率稳定在3%以下之后,12月20日左右开始成为准CTD券。T1603快到到期时,由于市场利率又上扬接近3%,使得第三只债券(150026.IB)的准CTD券地位有所动摇,但最终因为市场利率未突破3%,使其成为了最终的CTD券。

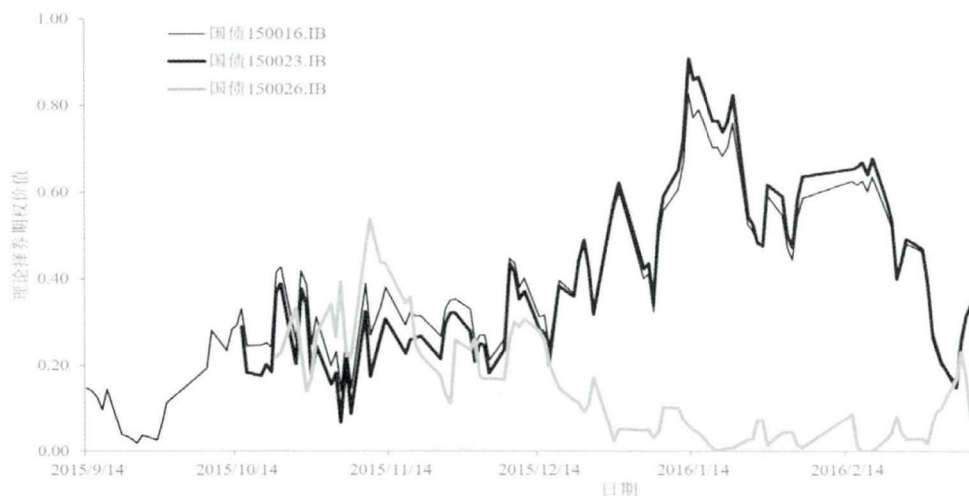


图6 T1603主要准CTD券的理论择券期权价值对比

那么市场的真实情形如何呢?图7报告了T1603主要CTD券的市场隐含期权价值,与图6的理论期权价值走势十分相似,都是在2015年12月底以前,前两个债券前两只债券(150016.IB和150023.IB)交替成为准CTD券,之后第三只债券(150026.IB)的隐含期权价值最低,成为准CTD券。尽管图7中最后快到到期时三只债券的期权价值差异很小,但从中金所公布的最终交割状况来看,正是第三只债券(150026.IB)成为最后的主要CTD券(交割占比66.7%,排名第二的交割券为150026.IB,占比14.6%),与我们的理论分析结论是一致的。

总之,本节的稳健性检验表明,本文提出的定价模型和计算方法是相当稳健的,结果仍然是可靠合理的,这些方法适合于不同期限的合约,市场交易规则的微调对其也没有造成大的影响。

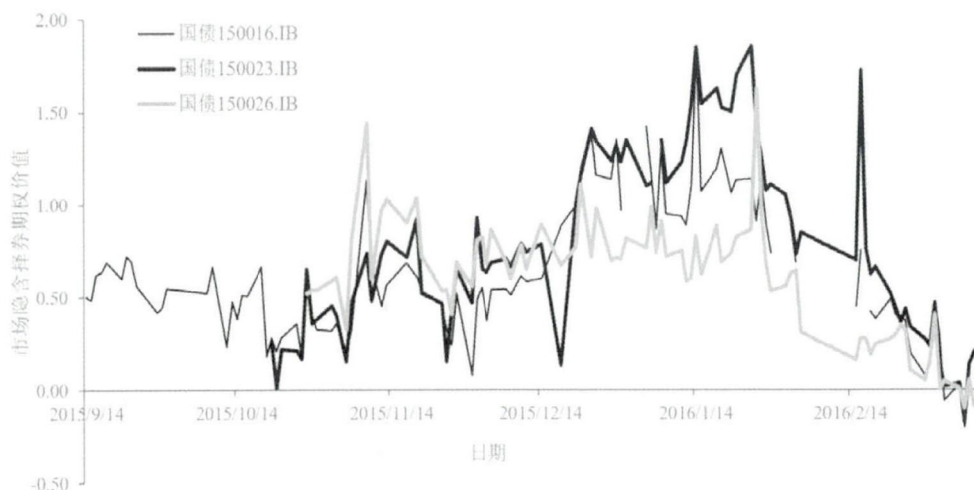


图7 T1603 主要准CTD 券的市场隐含择券期权价值对比

5 结论

本文在已有文献的基础上,提出了“直接定价法”和“两步定价法”两种方法,来为国债期货和择券期权定价。“直接定价法”直接使用双树拼接的BDT树图,而“两步定价法”则是经择券期权调整的持有成本模型。两种方法的关键都在于树图的构造,而本文提出的“双树拼接法”较好地解决了原始BDT树图难以直接运用的问题。

运用上述两种方法为中国的TF1403中期国债期货合约定价,并运用T1603长期国债期货进行了稳健性检验。我们发现两种定价模型得到的国债期货价格与其市场价格在走势上具有很高的-致性,理论模型揭示的CTD券转换以及期权价值与现实也具有较高的吻合度,说明两种理论模型和定价算法基本都是正确的。

对比两种定价方法的实证结果,我们发现从整体来看,“两步定价法”的定价结果更为接近市场的真实价格,但“直接定价法”的定价结果更为稳定。这与两种定价方法的本质特征是一致的:“直接定价法”全部使用市场整体无风险利率期限结构定价,与市场价格一致性相对低,但稳定性高;而“两步定价法”同时使用了市场无风险利率期限结构和市场现券价格的信息来为国债期货定价,与市场一致性较高,但波动较大。具体使用时,应视市场的实际情况以及可获得的信息准确性来选择合适的模型方法。

最后,从择券期权价值来看,我们发现当利率稳定高于3%时,择券期权价值对国债期货价格的影响很小,几乎可以忽略不计。理论和市场隐含的择券期权价值的对比表明市场整体上低估了择券期权的价值。在国债期货的整个交易期内市场实际上不存在明显的“券”现象,这说明了市场可能整体存在一定的惯性,或存在一定的换券成本,或不同市场的参与者对可交割券存在不同的偏好,这使得市场不会轻易改变对CTD券的预判,即市场在CTD券的选择上并非完全理性。但当利率向下突破3%时,市场对“换券”的预期和期权价值的判断明显上升,甚至超过了理论价值。我们认为其主要原因是由于历史长期利率很少低于3%,市场认为长期利率低于3%是不稳定的,这导致了市场波动和期权价值的提升。这为我们指明了未来新的研究方向,一方面,在确定波动率等参数时,可能需要考虑市场情绪和风险厌恶等参数的影响,来估计波动率预期值,而不能简单使用历史数据估计得到的波动率参数,如果未来利率期权开始交易,使用隐含波动率应当是比本文的历史波动率更好的选择;另一方面,在利率波动

率可能加大的阶段, 可能有必要引入更为复杂的多因子模型, 对本文的单因子模型进行拓展。

[参考文献]

- [1] Hegde S P. An ex post valuation of the quality option implicit in the treasury bond futures contract [J]. Journal of Banking and Finance, 1990, 14(4): 741-760.
- [2] Hemler M L. The quality delivery option in treasury bond futures contracts [J]. Journal of Finance, 1990, 45(5): 1565-1586.
- [3] Gay G D, Manaster S. The quality option implicit in futures contracts [J]. Journal of Financial Economics, 1984, 13: 353-370.
- [4] Chance D M, Hemler M L. The impact of delivery options on futures prices: A survey [J]. Journal of Futures Markets, 1993, 13(2): 127-155.
- [5] Boyle P P. The quality option and timing option in futures contracts [J]. Journal of Finance, 1989, 44(1): 101-113.
- [6] Balbas A, Reichardt S. On the future contract quality option: A new look [J]. Applied Financial Economics, 2010, 20: 1217-1229.
- [7] Margrabe W. The value of an option to exchange one asset for another [J]. Journal of Finance, 1978, 33(1): 177-186.
- [8] Kane A, Marcus A J. The quality option in the treasury bond futures market: An empirical assessment [J]. Journal of Futures Markets, 1986, 6(2): 231-248.
- [9] Ritchken P. Pricing the quality option in treasury bond futures [J]. Mathematical Finance, 1992, 2(3): 197-214.
- [10] Bick A. Two Closed-form formulas for the futures price in the presence of a quality option [J]. European Finance Review, 1997, 1: 81-104.
- [11] Rendleman J R J. Delivery options in the pricing and hedging of treasury bond and note futures [J]. Journal of Fixed Income, 2004, 14(2): 20-31.
- [12] Nunes J P V, Oliveira L A F D. Multi-factor and analytical valuation of treasury bond futures with an embedded quality option [J]. Journal of Futures Markets, 2007, 27(3): 275-303.
- [13] Ritchken P H, Sankarasubramanian L. A Multifactor model of the quality option in treasury futures contracts [J]. Journal of Financial Research, 1995, 18: 261-279.
- [14] Lin B H, Paxson D A. Term structure volatility and bund futures embedded options [J]. Journal of Business Finance and Accounting, 1995, 22: 101-127.
- [15] Ben-Abdallah R, Ben-Ameur H, Breton M. Pricing the chicago board of trade T-bond futures [J]. Quantitative Finance, 2012, 12(11): 1663-1678.
- [16] Burghardt G, Belton T. The Treasury Bond Basis: An in-Depth Analysis for Hedgers, Speculators, and Arbitrageurs [M]. US: McGraw-Hill, 2005.
- [17] 曾耿明. 中国国债期货定价研究 — 基于交割期权修正方法 [J]. 证券市场导报, 2015, (10): 36-40.
- [18] 陈蓉, 葛骏. 国债期货定价: 基本原理与文献综述 [J]. 厦门大学学报: 哲学社会科学版, 2015, (1): 33-40.
- [19] 陈蓉, 葛骏. 谁是国债期货的 CTD 券? [J]. 中国期货, 2015, 44(2): 62-65.
- [20] 郑振龙, 林璟. 沪深 300 股指期货定价偏差与投资者情绪 [J]. 数理统计与管理, 2015, 34(6): 1129-1140.
- [21] 魏洁, 韩立岩. GARCH 模型下基于偏最小二乘的欧式股指期货定价 — 来自香港恒生指数期权市场的证据 [J]. 数理统计与管理, 2015, 34(3): 550-560.
- [22] Shreve S. Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model [M]. US: Springer, 2004.
- [23] Shreve S. Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models [M]. US: Springer, 2004.
- [24] Black F, Derman E, Toy W. A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options [J]. Financial Analysts Journal, 1990, 46(1): 33-39.
- [25] 陈蓉, 郑振龙. 固定收益证券 [M]. 北京: 北京大学出版, 2011.