第4讲 衍生品定价原理

陈蓉 教授、博导
厦门大学管理学院财务系
厦门大学金融工程研究中心

http:// aronge.net
aronge@xmu.edu.cn

1.

动态利率模型简介

为何需要动态模型？

- 动态模型：DTSMs
  - 整条利率曲线的动态变化特征及给定时刻的静态特征
  - 建立起一致的定价框架
  - 建立起一致的利率风险管理框架
- 暂不考虑信用风险

动态利率模型的建模对象

- 即期利率（远期利率）为主，少数到期收益率（互换利率）
- 利率两大特点
  - 不可交易：风险中性测度不合适
  - 无限维的曲线
- 整条即期利率曲线情形下的可能建模对象
  - 无限维即期利率（远期利率）
  - 无限维零息债价格
  - 一维瞬时（即期）利率（instantaneous spot rate/short rate）
  - 无限维瞬时远期利率（Instantaneous forward rate）

瞬时即期利率

* 货币市场账户价值与瞬时即期利率

$$M_t = e^{\int_0^t r_s ds}$$

$$dM_t = r_t M_t dt$$

* 货币市场账户在每个瞬间的价值增长都等于该时刻账户价值的瞬时无风险利息增值。货币市场账户价值始终在增长，但增长量是随机的，其随机性来源于每个时刻瞬时利率的变动

利率期限结构与瞬时即期利率

- 贴现因子（零息票债券）与瞬时利率

$$B_t^T = e^{-R_t^T \times (T-t)} = \tilde{\mathbb{E}}_t\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \right]$$

- 即期利率与瞬时利率

$$R_t^T = -\frac{1}{T-t} \ln \tilde{\mathbb{E}}_t\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \right]$$

- 只要瞬时利率的变化规律已知，就可以推知任意到期期限的即期利率的动态过程，可以视为整条利率曲线的基本元素

利率期限结构与瞬时远期利率

* 贴现因子（零息票债券）与瞬时远期利率

$$B_t^T = e^{-\int_t^T f_t^u du}$$

$$f_t^T = -\frac{\partial \ln B_t^T}{\partial T}$$

* 即期利率与瞬时远期利率

$$R_t^T = \frac{\int_t^T f_t^u du}{T-t}$$

选谁？

- 瞬时即期利率：
  - 降维；基础元素
  - 但转化函数复杂，需要涉及到风险中性测度期望
- 瞬时远期利率、即期利率和零息债价值
  - 表达利率期限结构的更为直接和简单的方式，不涉及概率分布
  - 无限维
- 债券价值一般不做建模对象：到期回到面值
- 瞬时远期利率是后两者的基础元素，其与瞬时即期利率关系也比较简单

动态瞬时利率模型的一般模型设定

- 假设瞬时利率服从伊藤过程

$$dr_t = \mu_t dt + \sigma_t dz_t$$

- 模型差异
  - 具体的建模对象
  - 风险源的数量
  - μ_t和σ_t的不同设定
    - 时间齐次/时间非齐次
    - 仿射形式/非仿射形式

推断利率的动态特征和未来分布

* 假设模型为

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dz_t$$

* 则在给定t时刻，未来T时刻的瞬时利率表达式为

$$r_T = e^{-\kappa(T-t)}r_t + \theta\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) + \int_t^T \sigma e^{-\kappa(T-s)}dz_s$$

* 未来T时刻的瞬时利率将服从正态分布，条件期望和条件方差为

$$\mathbb{E}_t[r_T] = \theta + (r_t - \theta)e^{-\kappa(T-t)}$$

$$\mathrm{VAR}_t[r_T] = \int_t^T \sigma^2 e^{-2\kappa(T-s)}ds = \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left[1 - e^{-2\kappa(T-t)}\right]$$

运用动态利率模型为利率衍生品定价

* 定价方法
  * 绝对定价法/现金流贴现原理：贴现率难以确定
  * 相对定价法/无套利定价原理

* 相对定价法：
  * 利用标的变量与衍生品价值之间的内在相对关系，基于标的变量的给定取值求出衍生产品价值。该方法并不关心标的变量的取值如何确定，而是将其假定为外生给定的，然后运用无套利（no-arbitrage）原理为衍生产品定价。

相对定价法假设

* 无套利：不存在无风险套利机会
* 可复制（市场完全）
  * 允许卖空
  * 没有交易费用和税收
  * 证券交易是连续的，价值变动也是连续的
  * 所有证券都完全可分

衍生品定价方法

- 偏微分方程（partial differential equations）法
- 等价鞅测度（equivalent martingale measure）法
- 以一维瞬时利率为例

偏微分方程方法（PDE）

1. 构造PDE
   ① 构造无风险组合
      A. 运用标的资产和衍生产品构造无风险组合
      B. 运用标的资产和无风险资产复制衍生产品
      C. 运用标的变量的两种可交易资产构造无风险组合
   ② 根据产品特征设定边界条件

2. 求解PDE
   A. 分析法
   B. 数值方法

构造PDE

假设瞬时利率服从伊藤过程

$$dr_t = \mu_{r,t}dt + \sigma_{r,t}dz_t \tag{6.12}$$

对于任意可交易的利率衍生品（可以是债券、利率远期、利率期权等以无风险利率为标的的任意可交易资产），其价值 V_t 显然是 r_t 和时间 t 的函数，只要 $\frac{\partial V}{\partial t}$、$\frac{\partial V}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$ 都存在并连续，根据伊藤引理，这些利率衍生品价值所遵循的随机过程均可表达为 [1]

$$dV_t = \mu_{V,t}V_t dt + \sigma_{V,t}V_t dz_t \tag{6.13}$$

其中，

$$\mu_{V,t} = \frac{1}{V_t}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu_{r,t}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_{r,t}{}^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)$$

$$\sigma_{V,t} = \frac{1}{V_t}\sigma_{r,t}\frac{\partial V}{\partial r}$$

不同衍生品价值随机过程之间的具体差别体现在自身价值 V_t 和各阶导数上。

在 t 时刻，任选其中两个可交易的利率衍生品构造投资组合[2]，两者价值分别用 V_{1t} 和 V_{2t} 表示。在可复制前提下，买入 $\sigma_{2t}V_{2t}$ 份衍生品 1，卖空 $\sigma_{1t}V_{1t}$ 份衍生品 2[3]，可以构造出一个瞬时无风险组合。因为该组合在 t 时刻的初始价值等于 $\sigma_{2t}V_{1t}V_{2t}-\sigma_{1t}V_{1t}V_{2t}$，而在接下来的一个极短瞬间 Δt 内，代入式(6.13)，该组合的离散价值变化为

$$\sigma_{2t}V_{2t}\left(\Delta V_{1t}\right)-\sigma_{1t}V_{1t}\left(\Delta V_{2t}\right)=\left(\mu_{1t}\sigma_{2t}-\mu_{2t}\sigma_{1t}\right)V_{1t}V_{2t}\left(\Delta t\right) \tag{6.14}$$

$$\frac{\mu_{1t}-r_t}{\sigma_{1t}}=\frac{\mu_{2t}-r_t}{\sigma_{2t}}$$

由于上述两个衍生证券是任选的，因此实际上对于任意的可交易利率衍生品，上式都成立。也就是说，对于任意的可交易利率衍生品，都有

$$\lambda_t=\frac{\mu_{V,t}-r_t}{\sigma_{V,t}} \tag{6.16}$$

代入式(6.13)中 $\mu_{V,t}$ 和 $\sigma_{V,t}$ 的表达式，可以得到利率衍生品价值 V_t 所满足的偏微分方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\left(\mu_{r,t}-\sigma_{r,t}\lambda_t\right)\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{2}\sigma_{r,t}{}^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=r_tV_t \tag{6.17}$$

理解偏微分方程

* 这是所有可交易的利率衍生品价值所满足的偏微分方程。

* 对于特定的利率衍生品，只要求解此偏微分方程，所得到的该衍生品价值所满足的表达式就是利率衍生品的定价公式。

* 所谓求解，就是找到一个函数，其偏导数满足PDE方程和边界条件，该函数是用标的变量所满足的随机过程参数来表达的。

* 衍生品的漂移率和波动率都没有最终进入到偏微分方程，该偏微分方程的求解结果是用标的变量的随机过程参数来表达衍生品的价值。

得到偏微分方程：已经完成定价？

- 需要
  - 分布假设：对数正态/几何布朗/其他分布/其他随机过程
  - Payoff设定（边界条件）
- 求解
  - 解析解
  - 数值解：直接对应有限差分方法
- 在动态模型或衍生品合约规定比较复杂的情况下，偏微分方程常常无法求得解析解，只能运用数值方法求得近似解。所以人们有时不得不接受相对简单但不符合现实的随机过程设定，以得到衍生品价值的解析解。

PDE方法定价是一个数学问题还是一个金融问题？

利率的市场风险价格（market price of risk）

第二，式(6.16)中 $\mu_{V,t}-r_t$ 的经济含义是 t 时刻可交易利率衍生品的风险溢酬（即预期收益率超过无风险利率的部分），而 λ_t 则是风险溢酬与其波动率的比率（夏普比率）。由于对所有的利率衍生品都一样，λ_t 显然只取决于瞬时利率和时间，因此 λ_t 是利率的（瞬时）市场风险价格（market price of risk），代表着在交易利率衍生品时，投资者承担每单位利率风险所要求的时变单位风险溢酬。

风险价格与PDE

- 上述PDE是由风险价格的定义展开得到的，其存在性和唯一性源自风险价格的存在性和唯一性，而后者又源自无套利和市场完全的假设。
  - 如果市场不是无套利的？——不存在这个PDE
  - 如果市场是无套利的，但却不是完全的——PDE存在却并不唯一

本页没看懂，可能说明什么都没看懂…

PDE的经济内涵：推导过程

- 衍生品的价值是由其复制和动态对冲过程决定的：replication
- forecasting与replication：资产定价的两种逻辑
- 绝对定价法VS相对定价法
- 动态对冲的意义
- 那些假设有多重要？

重点！

标的变量可交易和不可交易

第四，偏微分方程(6.17)意味着，要求解利率衍生品的价值，需要瞬时利率绝对漂移率 $\mu_{r,t}$、绝对波动率 $\sigma_{r,t}$ 和风险价格 λ_t 的信息，需要对它们的形式加以设定并估计相应的参数，或者在绝对波动率 $\sigma_{r,t}$ 之外，要能够将 $\mu_{r,t}-\sigma_{r,t}\lambda_t$ 作为一个整体估计出来。由于这些都不是可直接观测的变量，其难度可想而知。但如果标的变量是一个可交易资产的价值，问题就会简单得多。由于标的资产可以被视为自身的可交易衍生品，用 S_t 表示可交易的标的资产价值，式(6.16)将改写为

$$\mu_{S,t}-\sigma_{S,t}\lambda_t=r_t$$

偏微分方程(6.17)相应可简化为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+r_t\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{2}\sigma_{r,t}^{\ 2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=r_t V_t \qquad (6.19)$$

PDE的结果：预期收益率重要吗？

* 在偏微分方程中，会影响衍生品价值的不是μ，而是$\mu-\lambda\sigma$或是r
* 但σ始终需要估计

预期收益率变化意味着什么？

- 其他都没变，只是随机变量的预期收益率变化了
- 一种理解是在原有概率空间上，转换了概率测度，为保证可定义，要求其为等价测度
- Girsanov's theorem为简洁的等价测度转换提供了重要的数学基础
  - 在一定的条件下，我们可以仅通过一个关键变量（向量）转换到一个等价测度
  - 波动率不变，只改变期望值（漂移率）
  - 这一转换可以用维纳过程的简单切换来体现

Discounted Feynman-Kac Theorem

- 如果$\forall S(t), \mathrm{t}, \mathrm{E}|h(S_T, \mathrm{T})| < \infty$，则函数

$$f\left(S_t, t\right) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du} H\left(S_T, T\right)\right]$$

- 是边界条件 $$f\left(S_T, T\right) = H\left(S_T, T\right)$$
- 下偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + m_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r_t f\left(S_t, t\right)$$

- 的解。在测度Q下，S的随机过程可以描述为

$$dS_t = m_t dt + \sigma_t dz_t^{\mathbb{Q}}$$

* Discounted Feynman-Kac theorem的本质建立了PDE跟SDE的对应关系，最后将偏微分方程的解表达成了某一扩散过程的期望值

等价鞅测度方法

* 在衍生品定价中，波动率是必须估计的信息，但与漂移率和风险价格有关的估计是有可能规避的。等价鞅测度法的目的就是通过转换至某个等价概率测度中去定价，尽可能地规避不可观测变量的估计，特别是漂移率和风险价格的估计，以简化定价

等价测度

- 概率测度：定义在样本空间的事件域上的一个满足非负性、正则性 和互不相容事件可数可加性的实值函数，其将样本空间中的每一个元素映射到[0,1] 上的某一个数，用于刻画随机事件的发生概率。
- 满足上述条件的函数不止一个，因此对于同样的样本空间和事件域，可能有不同的概率测度。
- 等价测度：保证数学上的良好定义
  - 定义在相同样本空间和事件域上的两个概率测度，如果对同样的事件赋予零概率，则为等价测度。
  - 两个测度的差异只是对可能发生事件赋予的概率不同。
  - 无论在哪个等价测度下求当前时刻的资产价值，由于是确定的，应该是相等的

鞅

* 随机变量的鞅性质是指在给定测度下随机变量未来的条件期望值等于当前值。
* 在一个测度下的鞅过程在其他测度下不再具有鞅性质。

Girsanov's theorem

一维的哥萨诺夫定理内容如下[1]：假设 z_t （$0 \leq t \leq T$）是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的维纳过程，其中 Ω 是样本空间，$\mathcal{F}_t$ 是该维纳过程的域流[2]，$\mathbb{P}$ 则是一个概率测度。只要随机过程 a_t 是满足 $\int_0^T a_s^2 ds < \infty$ 和 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T a_s^2 ds}\right] < \infty$ 的适应性过程，通过相应定义的随机过程

$$\Lambda_t(a) = e^{-\int_0^t a_s dz_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_s^2 ds}$$

就可以从概率测度 $\mathbb{P}$ 转换至等价概率测度 $\mathbb{Q}^a$，两个测度间的关系为

$$\frac{d\mathbb{Q}^a}{d\mathbb{P}} = \Lambda_T(a)$$

而如下定义的随机变量 $z_t^{\mathbb{Q}^a}$

$$z_t^{\mathbb{Q}^a} = z_t + \int_0^t a_s ds$$

是在测度 $\mathbb{Q}^a$ 下的一个维纳过程。上式也可以表达为我们更为熟悉的形式，

$$dz_t^{\mathbb{Q}^a} = dz_t + a_t dt \tag{6.20}$$

* 看似复杂的哥萨诺夫定理实际上为我们提供了转换至等价测度的简便方法，其关键显然在于a_t 的选择。选择不同的a_t，就能够转换到不同的等价测度，而这一转换可以用维纳过程的简单切换来体现

$$dz_t^{\mathbb{Q}^a} = dz_t + a_t dt$$

等价鞅方法：一个定理

在适当的正则性条件下，在特定测度 $\mathbb{Q}$ 下，一个伊藤过程 x_t 的相对漂移率是由随机过程 m_t 给出的，当且仅当在该测度下 $x_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[x_T e^{-\int_t^T m_s ds}\right]$。

证明：充分性

我们首先证明其充分性。如果x_t在测度$\mathbb{Q}$下的相对漂移率是m_t，则x_t在测度$\mathbb{Q}$下的表达形式为

$$dx_t = m_t x_t dt + \sigma_{x,t} x_t dz_t^{\mathbb{Q}}$$

令

$$D_t = e^{-\int_0^t m_s ds}$$
$$W_t = D_t x_t$$

其中$dz_t^{\mathbb{Q}}$是测度$\mathbb{Q}$下的维纳过程。可以看出，D_t是没有维纳过程项的特殊伊藤过程，因为

$$dD_t = -D_t m_t dt$$

运用二维伊藤引理，有

$$dW_t = D_t dx_t + x_t dD_t + dx_t dD_t$$
$$= W_t \left(\frac{dx_t}{x_t} + \frac{dD_t}{D_t} \right) = \sigma_t W_t dz_t^{\mathbb{Q}}$$

这意味着 W_t 是一个鞅过程，即 $W_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[W_T\right]$，代入整理可得

$$x_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[x_T e^{-\int_t^T m_s ds} \right] \tag{6.21}$$

证明：必要性

充分性得证。反过来，如果式(6.21)成立，x_t 的绝对漂移率等于

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[x_{t+\Delta t}-x_t\right] &= \frac{1}{\Delta t}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{t+\Delta t}^{\mathbb{Q}}\left[x_T e^{-\int_{t+\Delta t}^{T} m_s ds}\right]-\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[x_T e^{-\int_t^T m_s ds}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[x_T e^{-\int_t^T m_s ds}\frac{e^{-\int_t^{t+\Delta} m_s ds}-1}{\Delta t}\right] \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} m_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[x_T e^{-\int_t^T m_s ds}\right]=m_t x_t
\end{aligned}
$$

举例：某测度（一维）

- 令哥萨诺夫定理中的关键变量a_t为市场对一维风险源的风险价格λ_t
- 标的变量所服从的随机过程

$$dr_t = \mu_{r,t}dt + \sigma_{r,t}\left(d\tilde{z}_t - \lambda_t dt\right) = \left(\mu_{r,t} - \lambda_t\sigma_{r,t}\right)dt + \sigma_{r,t}d\tilde{z}_t$$

- 标的变量可交易衍生品所服从的随机过程

$$\begin{aligned} dV_t &= \mu_{V,t}V_t dt + \sigma_{V,t}V_t\left(d\tilde{z}_t - \lambda_t dt\right) = \left(\mu_{V,t} - \lambda_t\sigma_{V,t}\right)V_t dt + \sigma_{V,t}V_t d\tilde{z}_t \\ &= r_t V_t dt + \sigma_{V,t}V_t d\tilde{z}_t \end{aligned}$$

风险中性测度与风险中性定价

* 由于相对漂移率是预期收益率，相对漂移率为r意味着在这个新测度下，无论面临的客观风险有多大，任意可交易资产的单期普通复利预期收益率都等于无风险利率，投资者并不要求风险溢酬。因此称这个测度为“风险中性测度”
* 风险中性定价公式

$$f_t = \tilde{\mathbb{E}}_t\left[f_T e^{-\int_t^T r_s ds} \right]$$

定价举例

* 一个T时刻到期、面值为1的零息债价值

$$B_t^T = \tilde{\mathbb{E}}_t\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\right]$$

* 利率是否随机影响不大的可交易资产价值

$$V_t = e^{-r(T-t)}\tilde{\mathbb{E}}_t\left[V_T\right]$$

如果其标的资产也可交易，不再需要现实测度下的漂移率和风险价格信息，只需要波动率信息和可观测的无风险利率信息——风险中性定价：适合股票、外汇和大宗商品。

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_{S,t} S_t d\tilde{z}_t$$

$$c_t^{S_t,T,K} = e^{-r(T-t)}\tilde{\mathbb{E}}_t\left[\max\left(S_T - K, 0\right)\right]$$

基于状态的测度转换理解

- 假设两期模型，三种状态
- 任意资产价格都等于其在各种状态下的回报期望的贴现值之和：

$$S = P_1D_1X_1 + P_2D_2X_2 + P_3D_3X_3 = E(DX) \quad (1)$$

$$\text{注意：} S \neq DE(X) = \frac{E(X)}{1+y}$$

- 对其进行数学变换，可得

$$S = D^Q\left(\frac{P_1D_1}{D^Q}X_1 + \frac{P_2D_2}{D^Q}X_2 + \frac{P_3D_3}{D^Q}X_3\right)$$

- 令$Q_i = \frac{D_i}{D^Q}P_i$，则有

$$S = D^Q(Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3) = E^Q(D^QX)$$

风险中性测度

* 在Q测度下，所有状态的贴现因子都相等，因此Q测度被人们称为风险中性测度。
* D^Q被称为无风险贴现因子。如果现实当中无风险利率存在，D^Q的倒数就等于1+无风险利率。
* 两个测度的关系：

$$Q_i = \frac{D_i}{D^Q} P_i$$

概率、期望值和风险厌恶

* 投资者厌恶风险程度、股票的预期收益率和股票升跌概率之间的联系：
  * 在风险中性测度下无风险利率为 10%，则股票上升概率 p 为

$$10 = e^{-0.1\times 0.25} \times \left[11p + 9\left(1-p\right)\right] \Rightarrow p = 62.66\%$$

  * 若现实测度下股票预期收益率为 15%，则股票上升概率 p 为

$$10 = e^{-0.15\times 0.25} \times \left[11p + 9\left(1-p\right)\right] \Rightarrow p = 69.11\%$$

测度转换：数学理解

- 根据Girsanov定理，在一定正则性条件下取一个λ的值，就可转换至一个等价测度
  - 等价测度：关于$\mathcal{F}$中哪些集合具有零概率是一致的
- 测度转换的实质是给了不同的状态（ω）以不同的概率。
- 测度转换：转换概率、期望、漂移率，什么没有改变？

风险中性测度转换：金融理解

- 只要假设市场无套利，风险中性测度存在
- 由于可交易资产在风险中性测度下的漂移率为无风险利率，意味着λ为各风险源对应的风险价格（所组成的向量）
- 从现实的风险厌恶测度转到风险中性测度，实际上是给了不好的情形以较高的概率（主观概率），期望值下降

- 由于在概率中已经体现了风险，贴现时就无需再体现风险，只需以无风险利率贴现
  - 实际概率对应实际期望，风险态度体现在贴现率当中
  - 风险中性概率对应主观期望，风险态度体现在概率中，贴现率只需使用无风险利率

- 测度转换：转换预期收益率、风险态度和风险价格
- 如果标的资产有红利？

风险中性测度意味着投资者风险中性吗？

* 风险中性测度只是为便利定价而引入的一个技术测度

为什么我们喜欢风险中性测度?

* 不考虑红利，只需要无风险利率和波动率信息就已足够，只有一个待估参数。

我们总可以进行风险中性定价吗？

- 换测度定价是一个数学问题还是金融问题？
- 现实测度向风险中性测度的转换是通过令哥萨诺夫定理中的a_t等于现实测度下的风险价格实现的，风险价格在市场无套利和可复制的前提条件下才具存在性和唯一性
- 风险价格的存在和唯一意味着什么？
  - 无套利+市场完全（可复制）

  =风险价格存在和唯一

  =风险中性测度存在和唯一

  =定价存在和唯一
  - 无套利但不完全：存在但不唯一

世界不是一维的而且是相关的

* 在我们的模型中，只讨论独立/不相关的多维风险源（相关性可以分解）
* 一个全局的风险中性测度，需要对每一个风险源都存在唯一的风险价格，在这个测度下，世界上所有的冗余资产都可以运用风险中性定价
* 平时，我们只能/只需要考虑相关的风险源，考察其风险价格的存在性和唯一性，“局部风险中性测度”

市场风险、信用风险与流动性风险

- 市场风险多用风险价格来处理测度转换
- 信用风险和流动性风险的常见做法是以未来现金流折扣的方式处理，然后在市场风险对应的风险中性测度测度下定价

定价测度的维度

* 存在并唯一的等价定价测度并不只有一个
    * 我们至少已经知道了两个：现实测度和风险中性测度
    * 为什么我们不喜欢现实测度定价？因为参数无法估计
    * 只要市场无套利和可复制，转换至哪个等价测度下定价，定价结果都是一致的。具体选择哪个等价测度仅取决于在哪个测度下为特定资产定价相对简单
* 风险中性测度就能解决所有的定价难题吗？
    * 最适合假设利率为常数的情形且标的变量可交易的情形
    * 不可交易变量在风险中性测度下的相对漂移率并不能保证等于无风险利率，仍然不可观测
    * 只要假设利率随机，资产价值由无风险利率的积分和到期资产回报的联合风险中性分布决定

试试其他测度

* 任意资产价格都等于其在各种状态下的回报期望的贴现值之和：

$$S = P_1D_1X_1 + P_2D_2X_2 + P_3D_3X_3 = E(DX)$$

* 对其进行数学变换，可得

$$S = M^{N1}\frac{P_1M_1}{M^{N1}}X_1 + M^{N2}\frac{P_2M_2}{M^{N2}}X_2 + M^{N3}\frac{P_3M_3}{M^{N3}}X_3$$

* 令$N_i = \frac{M_i}{M^{Ni}}P_i$，如果$N_i$之和等于1

$$S = M^{N1}N_1X_1 + M^{N2}N_2X_2 + M^{N3}N_3X_3 = E^N(M^NX)$$

如何找到其他定价测度：等价鞅定理

定理 6.2 假设市场是无套利和可复制的。设两种（无红利[2]）可交易资产的价值 V_t 和 N_t 在风险中性测度 $\tilde{\mathbb{Q}}$ 下分别服从

$$dV_t = r_t V_t dt + \boldsymbol{\sigma}_t V_t d\tilde{\mathbf{z}}_t$$
$$dN_t = r_t N_t dt + \mathbf{v}_t N_t d\tilde{\mathbf{z}}_t$$

其中 $\tilde{\mathbf{z}}_t = (\tilde{z}_{1t}, \cdots, \tilde{z}_{nt})'$ 表示风险中性测度下的 n 维维纳过程；$\boldsymbol{\sigma}_t = (\sigma_{1t}, \cdots, \sigma_{nt})'$，$\mathbf{v}_t = (v_{1t}, \cdots, v_{nt})'$。则以 N_t 作为计价单位（numéraire）的资产价值 $\dfrac{V_t}{N_t}$ 在 $\mathbb{Q}^N$ 测度下是鞅过程[3]，即

$$\frac{V_t}{N_t} = \mathbb{E}_t^N\left[\frac{V_T}{N_T}\right] \tag{6.27}$$

其中 $\mathbb{E}_t^N(\cdot)$ 表示 $\mathbb{Q}^N$ 测度下的条件期望。概率测度 $\mathbb{Q}^N$ 的定义为

$$\frac{d\mathbb{Q}^N}{d\tilde{\mathbb{Q}}} = \exp\left(\int_0^t \mathbf{v}_s \mathbf{d}\tilde{\mathbf{z}}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\mathbf{v}_s\|^2 ds\right)$$

* 其中,

$$\mathbf{dz}_t^{\mathbb{N}} = \mathbf{d}\tilde{\mathbf{z}}_t - \mathbf{v}_t' dt$$ 。

测度转换中的关键变量是资产价值 N_t 的相对波动率向量 $\mathbf{v}_t'$ 。相应地，这两种可交易资产的价值 V_t 和 N_t 在 $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ 测度下将分别服从

$$dV_t = \left(r_t + \mathbf{v}_t'\boldsymbol{\sigma}_t\right)V_t dt + \boldsymbol{\sigma}_t V_t \mathbf{dz}_t^{\mathbb{N}}$$

$$dN_t = \left(r_t + \mathbf{v}_t'\mathbf{v}_t\right)N_t dt + \mathbf{v}_t N_t \mathbf{dz}_t^{\mathbb{N}}$$

* 注意，该定理并不要求V和N有关。

等价鞅测度1:
以货币市场账户波动率为风险价格（风险中性测度）

- 由于货币市场账户的随机过程为

$$dM_t = r_t M_t dt$$

$\tilde{\lambda}=0$，因此这个测度

风险价格为0→风险中性测度。

- 因此，这个测度
  - 风险价格为0，风险中性测度
  - 鞅性质：无风险贴现资产价值服从鞅过程

$$\frac{V_t}{M_t}=\tilde{\mathbb{E}}_t\left(\frac{V_T}{M_T}\right) \qquad D_t=\frac{1}{M_t}=e^{-\int_0^t r_s ds} \qquad D_t V_t=\tilde{\mathbb{E}}_t\left(D_T V_T\right)$$

风险中性测度与风险中性定价的严谨描述

在无红利的情况下，一个具有以下三个性质的测度

(1) 与 $\mathbb{P}$ 测度等价；

(2) 对应的 RN 导数 $\dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ 方差有限

(3) 对于任何资产 i，$\tilde{P}_{it} = P_{it} e^{-\int_0^t r_s ds}$ 贴现价格过程在该测度下是一个鞅，即

$$P_{it} e^{-\int_0^t r_s ds} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[P_{iT} e^{-\int_0^T r_s ds} \right]$$

被称为一个风险中性测度。

从性质 3 可以推出如下定价公式

$$P_{it} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[P_{iT} e^{-\int_t^T r_s ds} \right]$$

也就是说，瞬时利率 r 的积分和 P 期末价值的联合风险中性分布完全决定了资产价格。Duffie（2001,p109）证明在一定的技术条件下，任何自融资交易策略的价值也满足上述公式。

风险中性定价的优劣势

* 利率假设为常数，标的变量为可交易资产：只需要波动率信息

$$c_t^{S_t,T,K} = e^{-r(T-t)}\tilde{\mathbb{E}}_t\left[\max\left(S_T - K, 0\right)\right]$$

* 利率随机，需要考虑标的变量与利率的联合分布

$$c_t^{S_t,T,K} = \tilde{\mathbb{E}}_t\left[\max\left(S_T - K, 0\right)e^{-\int_t^T r_s ds}\right]$$

* 标的变量不可交易，其风险中性相对漂移率并不等于无风险利率

$$\mu_{x,t} - \lambda_t \sigma_{x,t}$$

风险中性测度定价的运用：零息债价格

* BSM欧式期权定价公式

$$c_t^{S_t,T,K} = e^{-r(T-t)}\tilde{\mathbb{E}}_t\left[\max\left(S_T - K, 0\right)\right]$$

* 零息债定价公式（贴现因子表达式）

$$B_t^T = e^{-R_t^T \times (T-t)} = \tilde{\mathbb{E}}_t\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\right]$$

* 即期利率表达式

$$R_t^T = -\frac{1}{T-t}\ln\tilde{\mathbb{E}}_t\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\right]$$

等价鞅测度2:以零息债波动率为风险价格（T远期测度）

* 以B_t^T波动率作为风险价格的测度：T远期测度

$$\frac{V_t}{B_t^T} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}\left(\frac{V_T}{B_T^T}\right) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}\left(V_T\right) \qquad V_t = B_t^T \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}\left(V_T\right)$$

远期测度的重要性质I

* 由于

$$0 = B_t^T \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}\left(S_T - F_t^T\right)$$

* 因此

$$F_t^T = \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}\left(S_T\right) \qquad F_t^T = \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}\left(F_T^T\right)$$

* 也就是说

T 时刻到期的远期价格 F_t^T 等于未来 T 时刻标的变量价值 S_T 在 $\mathbb{T}$ 远期测度下的条件期望

$\mathbb{T}$ 远期测度是一个 T 时刻到期的远期价格 F_t^T 服从鞅过程的测度。

远期测度的重要性质II

第二，当前时刻的普通复利[2]远期利率 R_t^{T,T^*} 等于未来即期利率 $R_T^{T^*}$ 在 $\mathbb{T}^*$ 远期测度下的条件期望，即 $R_t^{T,T^*}=\mathbb{E}_t^{\mathbb{T}^*}\left[R_T^{T^*}\right]$

* 证明

$$R_t^{T,T^*}=\frac{1}{T^*-T}\left[\frac{B_t^T-B_t^{T^*}}{B_t^{T^*}}\right]$$

$$V_t=\frac{B_t^T-B_t^{T^*}}{T^*-T}$$

$$R_t^{T,T^*}=\frac{V_t}{B_t^{T^*}}$$

注意到 V_t 等式右边的分子是两个不同剩余期限的零息债的价差，因此 V_t 对应了一项可交易资产组合，而 R_t^{T,T^*} 可以视为以 $B_t^{T^*}$ 计价的可交易资产价值。这样，运用等价鞅测度定理可以得到，在以 $B_t^{T^*}$ 的相对波动率作为风险价格的 $\mathbb{T}^*$ 远期测度下，R_t^{T,T^*} 是鞅过程，即

$$R_t^{T,T^*}=\mathbb{E}_t^{\mathbb{T}^*}\left[R_T^{T^*}\right]$$

风险中性测度VS远期测度(胜出)

- 风险价格不同，概率不同
- 具有鞅性质的随机变量不同：
  - 风险中性测度：期货价格是鞅过程 $Fu_t^T = \tilde{\mathbb{E}}_t(S_T) = \tilde{\mathbb{E}}_t(Fu_T^T)$ $F(t,T) = \tilde{\mathbb{E}}_t[S_T] + \frac{\tilde{Cov}_t\left[S_T, e^{-\int_t^T r_s ds}\right]}{B(t,T)}$
  - 远期测度：远期价格是鞅过程 $F_t^T = \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}(F_T^T)$
- 定价公式不同 $V_t = \tilde{\mathbb{E}}_t\left[V_T e^{-\int_t^T r_s ds}\right]$ $V_t = B_t^T \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}(V_T)$
  - 远期测度更适合假设利率随机的情形
  - 远期测度对变量是否可交易无要求,因为远期测度定价对漂移率是否为无风险利率没有要求
- 利率非随机时,两个测度是同一个测度

Black's Model (1976) revisited

- 假设利率常数，到期期货（远期）价格在风险中性测度下服从对数正态分布，则

$$
\begin{aligned}
c_t &= e^{-r(T-t)}\tilde{\mathbb{E}}_t\left[\max\left(F_T - K, 0\right)\right] = e^{-r(T-t)}\left\{\tilde{\mathbb{E}}_t\left[F_T\right]N\left(d_1\right) - KN\left(d_2\right)\right\} \\
&= e^{-r(T-t)}\left\{F_t N\left(d_1\right) - KN\left(d_2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

- 假设利率随机，到期远期价格在远期测度下服从对数正态分布

$$
\begin{aligned}
c_t &= B_{t,T}\mathbb{E}_t^T\left[\max\left(F_T - K, 0\right)\right] = B_{t,T}\left\{\mathbb{E}_t^T\left[F_T\right]N\left(d_1\right) - KN\left(d_2\right)\right\} \\
&= B_{t,T}\left\{F_t N\left(d_1\right) - KN\left(d_2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

一个重要结论

对于任意服从对数正态分布的随机变量 X_T 和常数 K， 在任意测度下

$$\mathbb{E}_t\left[\max\left(X_T-K,0\right)\right]=\mathbb{E}_t\left(X_T\right)N\left(d_1\right)-KN\left(d_2\right)$$

$$d_1=\frac{\ln\left(\dfrac{\mathbb{E}_t\left[X_T\right]}{K}\right)+\dfrac{\mathbb{VAR}\left(\ln X_T\right)}{2}}{\sqrt{\mathbb{VAR}\left(\ln X_T\right)}},$$

$$d_2=d_1-\sqrt{\mathbb{VAR}\left(\ln X_T\right)}$$

Black模型

$$c_t^{S_t,T,K} = B_t^T \left\{ \mathbb{E}_t^T \left[F_T^T \right] N(d_1) - K N(d_2) \right\}$$

$$= B_t^T F_t^T N(d_1) - K B_t^T N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_t^T}{K}\right) + \frac{\sigma_F{}^2 (T-t)}{2}}{\sigma_F \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_F \sqrt{T-t}$$

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{\mathbb{VAR}\left(\ln F_T^T\right)}{T-t}}$$

Black模型与BSM模型

- 同样为欧式期权定价，与BSM模型相比，Black模型更具适用性，因为从推导过程可以看出，Black模型不要求利率为常数，也不要求标的变量 可交易，其标的可以是标的本身或其远期，也可近似使用在期货期权上，只要求对数正态分布假设。

- 如果假设利率为常数，零息债价值 不会波动，其相对波动率也是零，这时风险中性测度和远期测度就是同一个测度，风险价格和定价公式都将是相同的，远期价格也将等于期货价格。BSM模型和Black模型将是等价的。

欧式期权常见定价模型

- 欧式期权定价
  - 几何布朗运动/对数正态分布
    - BSM模型：利率非随机+现货可交易+标的现货+红利已知+现货可做空
    - Black模型
      - 利率随机
      - 现货不可交易
      - 标的远期/期货
      - 红利未知
      - 现货不可做空
  - 其他随机过程/分布
    - CEV模型
    - SV模型
    - 跳跃模型
    - SVJ模型
    - LV模型

随机过程过于复杂无法求得解析解时采用数值方法

等价鞅测度3：
以年金因子波动率为风险价格（T_m互换测度）

定义t时刻的年金现值因子为

$$A_t^{T_0,T_m}=\sum_{i=0}^{m-1}\left(T_{i+1}-T_i\right)B_t^{T_{i+1}} \tag{6.35}$$

其中T_0为年金的起始时刻，T_{i+1}为每次现金流发生的时点，$i=0,1,\ldots,m-1$，$t\le T_0$。由于$A_t^{T_0,T_m}$是零息债的组合，也是可交易资产，因此可以对其运用等价鞅测度定理。对于以$A_t^{T_0,T_m}$的相对波动率作为风险价格的测度，我们将其称为“$\mathbb{T}_m$互换测度”。

根据等价鞅测度定理，在$\mathbb{T}_m$互换测度下我们有

$$\frac{V_t}{A_t^{T_0,T_m}}=\mathbb{E}_t^{\mathbb{A}_m}\left(\frac{V_T}{A_T^{T_0,T_m}}\right),t<T\le T_0<T_m \tag{6.36}$$

远期互换利率的性质

考虑一个 T_0 时刻开始、T_m 时刻到期、名义本金为 1 元的标准利率互换，固定利率和浮动利率的交换时点为 T_{i+1}，其中 $i=0,1,\ldots,m-1$。用 $SR_t^{T_0,T_m}$ 表示在 t 时刻（$t\le T_0$）的远期互换利率[1]，运用式(6.35)定义的年金贴现因子，该利率互换分解得到的固定利率债券在 t 时刻的价值可以写成

$$SR_t^{T_0,T_m}\cdot A_t^{T_0,T_m}+B_t^{T_m}$$

而浮动利率债券的价值在 T_0 时刻应等于 1，相应地在 t 时刻的价值为 $B_t^{T_0}$。由于互换利率是使互换价值为 0 的利率，因此合理的互换利率公式为

$$SR_t^{T_0,T_m}=\frac{B_t^{T_0}-B_t^{T_m}}{A_t^{T_0,T_m}} \tag{6.37}$$

显然，式(6.37)右端的分子分母都对应了一个可交易的资产组合。也就是说，远期互换利率可以表达为一个用年金贴现因子计价的可交易资产价值。这样，根据式(6.36)可知，远期互换利率 $SR_t^{T_0,T_m}$ 在 $\mathbb{T}_m$ 互换测度下是一个鞅过程。本章第三节将介绍的对数正态远期互换利率模型（lognormal forward-swap model，LSM）就是在特定的互换测度下，基于远期互换利率的上述鞅性质发展起来的。

等价鞅测度3：以标的资产波动率为风险价格

有时候，转换至以标的资产相对波动率为风险价格的测度，也可以简化定价，但这要求标的资产是可交易的资产。以一个到期日为 T 、行权价为 K 、标的为可交易资产的欧式看涨期权为例，继续用 $c_t^{S_t,T,K}$ 表示此欧式看涨期权价值，S_t 表示标的资产价值，我们有

$$
\begin{aligned}
c_t^{S_t,T,K} &= B_t^T \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}\left[\max\left(S_T-K,0\right)\right] = B_t^T \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}\left[\frac{S_T \mathbf{1}_{\{S_T>K\}}}{B_T^T}\right] - KB_t^T \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}\left[\frac{\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}}{B_T^T}\right] \\
&= S_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{S}}\left[\frac{S_T \mathbf{1}_{\{S_T>K\}}}{S_T}\right] - KB_t^T \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}}\left[\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}\right] \\
&= S_t \mathbb{Q}_t^{\mathbb{S}}\left[S_T>K\right] - KB_t^T \mathbb{Q}_t^{\mathbb{T}}\left[S_T>K\right]
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

两个要点

* 同样为欧式期权定价，这个测度与Black模型类似，不要求利率为常数，但与Black模型不同，这个测度要求标的变量是可交易资产，却并不要求标的资产价格到时服从对数正态分布。

* 测度转换

$$V_t = N_{1t}\mathbb{E}_t^{\mathbb{N}1}\left[\frac{V_T}{N_{1T}}\right] = N_{2t}\mathbb{E}_t^{\mathbb{N}2}\left[\frac{V_T}{N_{2T}}\right]$$

等价鞅测度转换

从一个风险价格为σ_M的测度转换至风险价格为σ_N的测度，标准布朗运动的漂移率将下降$\sigma_N-\sigma_M$，相应地该测度下的随机过程 x 的漂移率将上升$\left(\sigma_N-\sigma_M\right)\sigma_x$，如果有多个标准布朗运动，则该测度下的随机过程的漂移率将上升$\sum\left(\sigma_{N,i}-\sigma_{M,i}\right)\sigma_{x,i}$。

定义

$$W_t=\frac{N_t}{M_t}$$

则W_t的波动项显然为

$$\sigma_{W,i}=\sigma_{N,i}-\sigma_{M,i}$$

因此从一个风险价格为σ_M的测度转换至风险价格为σ_N的测度，该测度下的随机过程的漂移率将上升$\sum\sigma_{W,i}\sigma_{x,i}$（$\rho\sigma_x\sigma_W$），$W_t$被称为记账比（numeraire ratio）。

应用2:债券期权

在本章中，我们经常需要考虑的是为债券期权定价。由于债券是可交易资产，可以使用式(6.38)。以一个以T^*时刻到期的零息债$B_t^{T^*}$为标的资产、行权价为K、T时刻到期的欧式看涨期权为例，用c_t^{K,T,T^*}表示该期权的价值，套用式(6.38)，我们有

$$c_t^{K,T,T^*} = B_t^{T^*} \mathbb{Q}_t^{\mathbb{T}^*}\left[B_T^{T^*} > K\right] - KB_t^{T} \mathbb{Q}_t^{\mathbb{T}}\left[B_T^{T^*} > K\right] \tag{6.39}$$

注意式(6.39)可以看作两个远期测度的表达式：$\mathbb{T}$远期测度和$\mathbb{T}^*$远期测度。如果进一步假设到期零息债价值$B_T^{T^*}$服从对数正态分布，式(6.39)进一步推导的结果，会正好等于 Black 模型式(6.34)。

应用3：资产交换期权

- 期权多头在到期时有权利用资产U交换资产V（假设两种资产都不支付收益，可推广）
- 该期权到期回报为

$$f_T = \max\left(V_T - U_T, 0\right)$$

- 在对数正态分布假设下（额外引入分布假设）

$$\frac{f_t}{U_t} = \mathbb{E}^U\left[\frac{f_T}{U_T}\right] = \mathbb{E}^U\left[\frac{\max\left(V_T - U_T, 0\right)}{U_T}\right] = \mathbb{E}^U\left[\max\left(\frac{V_T}{U_T} - 1, 0\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}^U\left[\frac{V_T}{U_T}\right]N\left(d_1\right) - N\left(d_2\right) = \mathbb{E}^U\left[J_T\right]N\left(d_1\right) - N\left(d_2\right)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\mathbb{E}_t^U\left[J_T\right]\right) + \frac{1}{2}\sigma_{JT}^2 \times (T-t)}{\sigma_{JT} \times \sqrt{T-t}}, d_2 = d_1 - \sigma_{JT} \times \sqrt{T-t}$$

$$J_T = \frac{V_t}{U_t} = \mathbb{E}^U\left[\frac{V_T}{U_T}\right], \sigma_{JT}\text{可根据}It\text{?引理求得}$$

鞅定价步骤

1. 验证无套利和市场完全
2. 确定等价鞅测度Q^N
3. 以$\frac{V_T}{N_T}$的形式表达被定价资产的到期回报
4. 根据 $\frac{V_t}{N_t} = \mathbb{E}_t^N\left[\frac{V_T}{N_T}\right]$ 进行定价
5. 利用价格公式构建对冲策略

写出期望：已经完成定价？

* 需要
  * 分布假设：对数正态/几何布朗/其他分布/其他随机过程
  * Payoff设定
* 解析解
* 数值解：直接对应MC

PDE方法与等价鞅测度方法

- 定价结果一致
- 联系和内在一致性
  - 运用的重要前提条件都是市场无套利和可复制；
  - 都源于风险价格 存在并唯一；
  - 这两个定价方法之间可以相互推导的，数学中的贴现费恩曼—卡克定理(discounted Feynman-Kac theorem)表明偏微分方程的解可以表达为一个漂移率发生变化的测度下的期望值，而从风险中性测度下可交易资产的相对漂移率等于无风险利率，也可以推得偏微分方程；
  - 这两种方法都不能保证得到解析解，没有解析解时都需要引入数值方法得到资产价值的近似解。

动态利率模型定价思路

* 不同动态利率模型主要是在模型设定上（即伊藤过程的漂移率和波动率设定上）有所差异，其基本的定价和运用思路类似
  ① 先针对瞬时利率、瞬时远期利率或特定利率构建随机过程
  ② 在市场无套利和可复制的前提下为利率衍生品定价
    * 偏微分方程法：在一定的边界条件下求解偏微分方程，解出的表达式就是利率衍生品的定价公式；
    * 等价鞅测度法：通过转换至某个特定的等价测度，在该测度下利用鞅性质求解利率衍生品的定价公式，具体选择哪一个定价测度由具体情况确定

谢谢

厦门大学财务系　陈蓉
aronge@xmu.edu.cn