

第3讲 静态利率期限结构模型

陈蓉 教授、博导
厦门大学管理学院财务系
厦门大学金融工程研究中心

[http:// aronge.net](http://aronge.net)
aronge@xmu.edu.cn



利率期限结构的定义

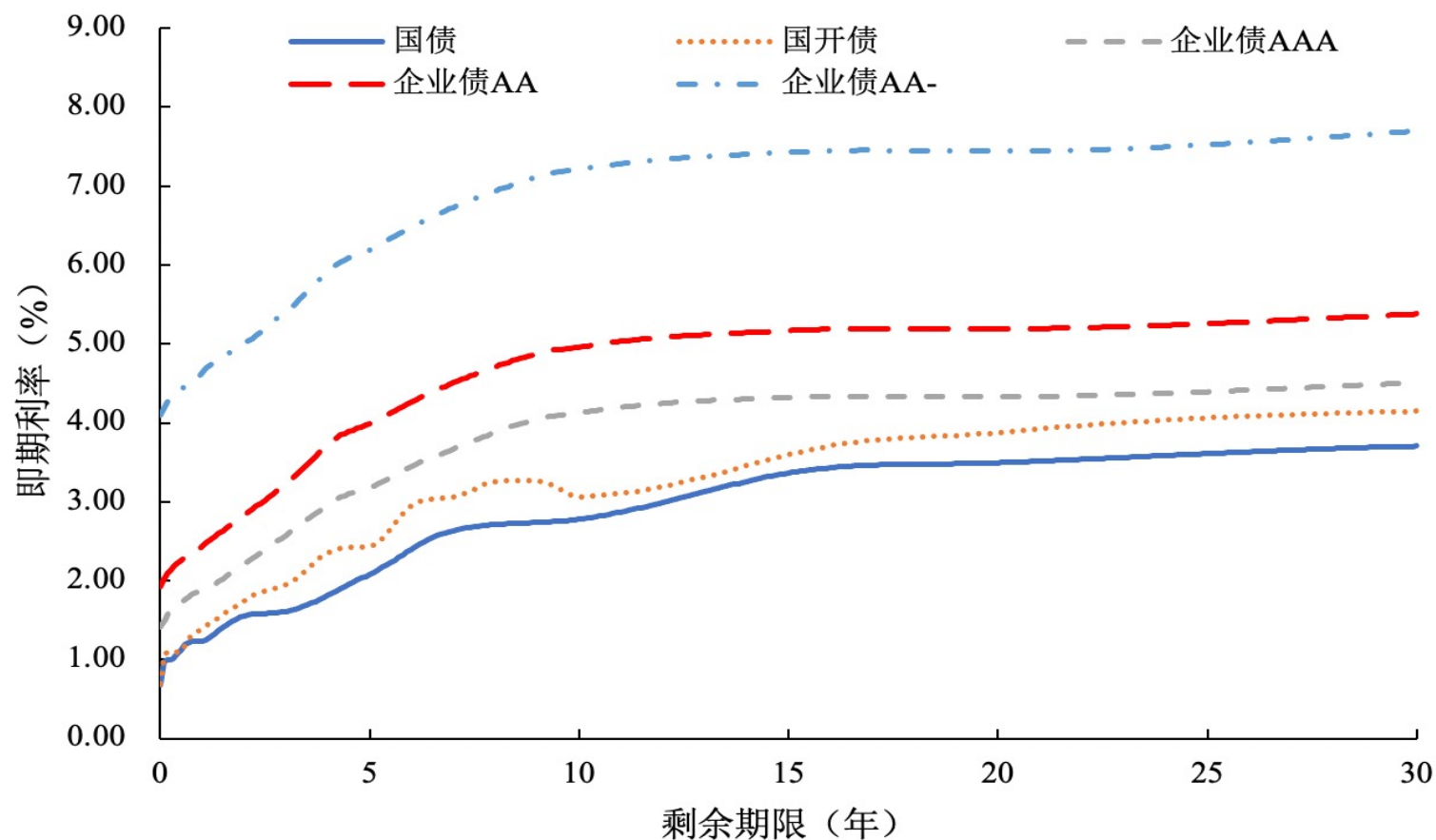
* 不同期限的利率水平之间的关系

* “利率期限结构” (interest rate term structure) , 有时也称为 “收益率曲线” (yield curve)

利率期限结构的类型

- * 利率的种类不同
 - * 到期收益率曲线
 - * 互换利率期限结构
 - * 即期利率期限结构
 - * 平价到期收益率曲线
 - * 远期利率期限结构
 - * 瞬时远期利率期限结构
- * 信用等级不同

不同信用级别的中债即期利率期限结构（2020年5月13日）



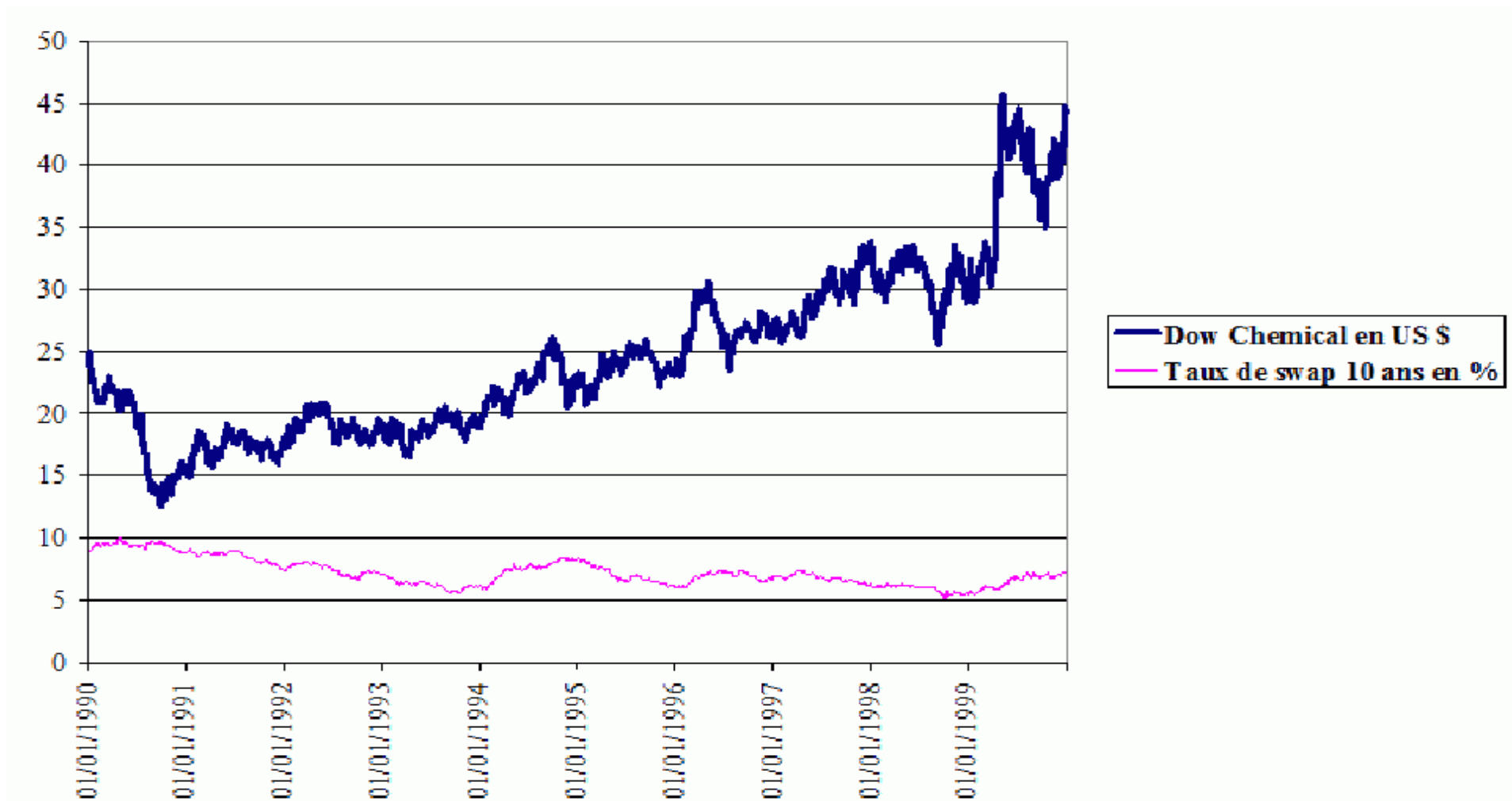
数据来源：Wind 资讯。

图 8.1 不同信用级别的中债即期利率期限结构（2020 年 5 月 13 日）

利率的典型特征

- * 名义利率的非负性（非正态分布）
- * 均值回归
- * 利率变动非完全相关
- * 短期利率比长期利率更具波动性
- * 利率波动往往还与利率水平有关

均值回归



利率变动非完全正相关

法国不同期限利率的相关系数表（1995-2000）

	1M	3M	6M	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y	10Y
1M	1									
3M	0.999	1								
6M	0.908	0.914	1							
1Y	0.546	0.539	0.672	1						
2Y	0.235	0.224	0.31	0.88	1					
3Y	0.246	0.239	0.384	0.808	0.929	1				
4Y	0.209	0.202	0.337	0.742	0.881	0.981	1			
5Y	0.163	0.154	0.255	0.7	0.859	0.936	0.981	1		
7Y	0.107	0.097	0.182	0.617	0.792	0.867	0.927	0.97	1	
10Y	0.073	0.063	0.134	0.549	0.735	0.811	0.871	0.917	0.966	1

利率变动非完全正相关

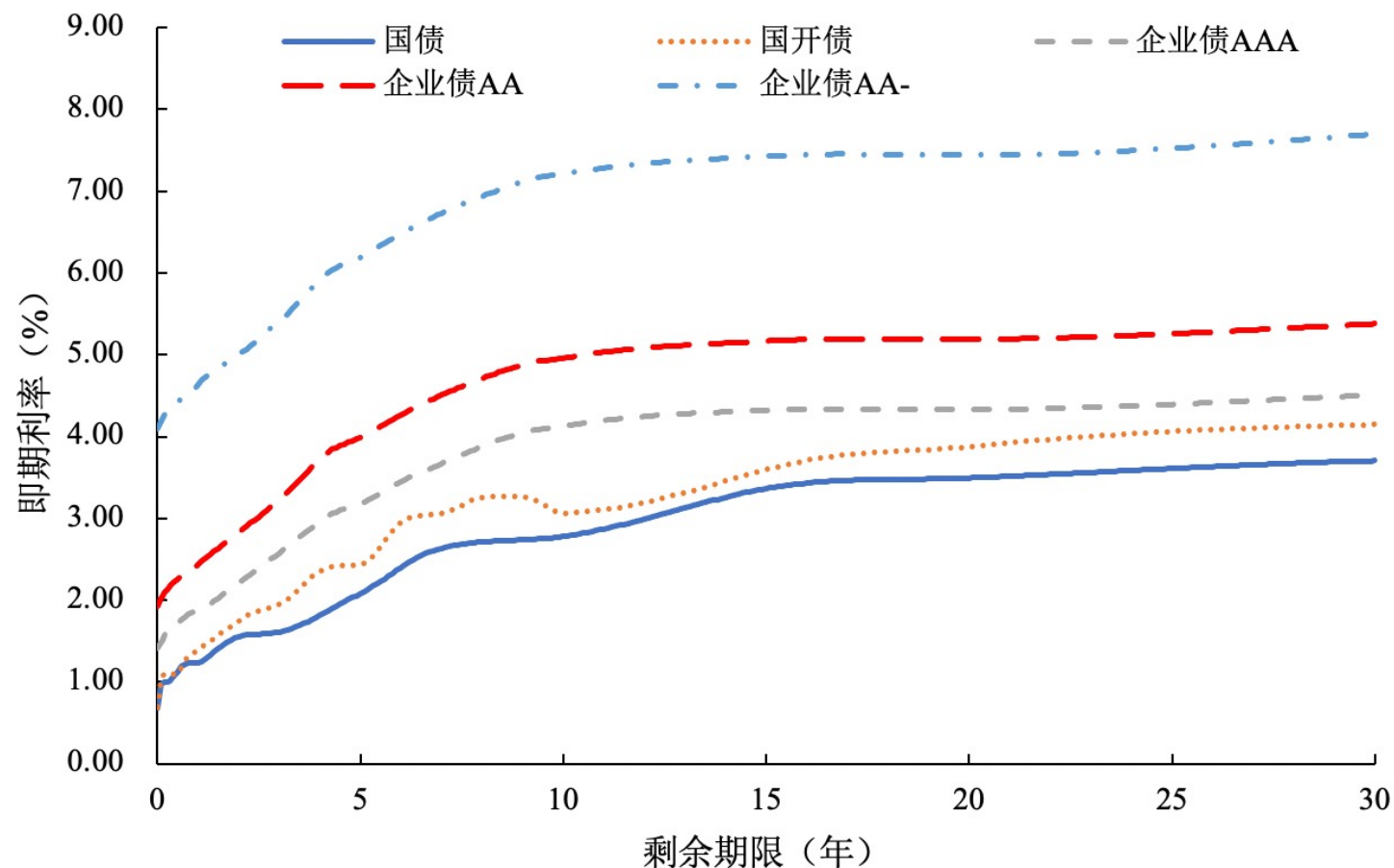
中国银行间不同期限国债收益率相关系数表（2005-2012）

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	YY10	YY11	YY12	YY13	YY14	YY15	YY16	YY17	YY18	YY19	YY20	YY21	YY22	YY23	YY24	YY25	YY26	YY27	YY28	YY29	YY30
Y1	1																													
Y2	0.9855	1																												
Y3	0.949	0.9879	1																											
Y4	0.8912	0.9518	0.9877	1																										
Y5	0.8159	0.8953	0.9528	0.9885	1																									
Y6	0.7343	0.8283	0.9037	0.9593	0.9909	1																								
Y7	0.6607	0.7649	0.8532	0.9237	0.9708	0.9942	1																							
Y8	0.6058	0.7162	0.8125	0.8925	0.9498	0.9829	0.9969	1																						
Y9	0.5675	0.6813	0.7822	0.8679	0.9315	0.9708	0.9904	0.9981	1																					
YY10	0.5414	0.6567	0.7598	0.8484	0.9155	0.9587	0.982	0.9932	0.9984	1																				
YY11	0.5241	0.6394	0.7428	0.8321	0.9006	0.9457	0.9715	0.9853	0.9935	0.9983	1																			
YY12	0.5133	0.6272	0.7291	0.8173	0.8852	0.9308	0.9577	0.9736	0.9845	0.9925	0.9979	1																		
YY13	0.5068	0.6179	0.7167	0.8021	0.8679	0.9124	0.9397	0.9571	0.9704	0.9816	0.9909	0.9975	1																	
YY14	0.5029	0.6098	0.7041	0.785	0.8473	0.8895	0.9161	0.9345	0.9501	0.9645	0.9778	0.9891	0.997	1																
YY15	0.5002	0.6016	0.69	0.7651	0.8224	0.8613	0.8865	0.9054	0.9229	0.9404	0.9577	0.9739	0.9874	0.9967	1															
YY16	0.4976	0.5924	0.6737	0.7417	0.7931	0.8278	0.8509	0.8698	0.8889	0.9092	0.9304	0.9514	0.9706	0.9862	0.9964	1														
YY17	0.4943	0.5818	0.6551	0.7153	0.7599	0.7897	0.8102	0.8287	0.8491	0.872	0.8968	0.9223	0.9469	0.9686	0.9856	0.9964	1													
YY18	0.4902	0.5698	0.6348	0.6868	0.7243	0.7489	0.7665	0.7843	0.8055	0.8305	0.8584	0.888	0.9175	0.945	0.9684	0.986	0.9966	1												
YY19	0.4854	0.5571	0.6139	0.6579	0.6884	0.7078	0.7223	0.7391	0.7608	0.7874	0.8179	0.8509	0.8847	0.9172	0.9464	0.9701	0.9871	0.997	1											
YY20	0.4802	0.5446	0.5938	0.6304	0.6544	0.669	0.6805	0.6962	0.718	0.7457	0.7781	0.8138	0.8511	0.8878	0.9217	0.9507	0.9733	0.9888	0.9974	1										
YY21	0.4752	0.5334	0.5761	0.6063	0.6248	0.6352	0.644	0.6584	0.6801	0.7083	0.7419	0.7795	0.8193	0.8591	0.8967	0.9299	0.9571	0.9774	0.9907	0.9979	1									
YY22	0.4709	0.5242	0.562	0.5874	0.6016	0.6087	0.6153	0.6285	0.6496	0.6779	0.712	0.7506	0.7918	0.8335	0.8735	0.9097	0.9402	0.9641	0.9812	0.9923	0.9982	1								
YY23	0.4675	0.5177	0.5524	0.5749	0.5865	0.5914	0.5964	0.6085	0.6289	0.6566	0.6904	0.7289	0.7704	0.8128	0.8538	0.8914	0.9238	0.95	0.9698	0.9838	0.993	0.9982	1							
YY24	0.4649	0.5141	0.548	0.5697	0.5805	0.5847	0.5889	0.6	0.6193	0.6459	0.6786	0.7159	0.7563	0.7978	0.8383	0.8757	0.9083	0.9353	0.9564	0.9723	0.9839	0.9923	0.9978	1						
YY25	0.4622	0.5127	0.5484	0.5718	0.5842	0.5892	0.5935	0.6039	0.6219	0.6466	0.677	0.7119	0.7497	0.7885	0.8265	0.8616	0.8925	0.9184	0.9393	0.9558	0.969	0.98	0.9894	0.9967	1					
YY26	0.4575	0.5118	0.5521	0.5802	0.5965	0.6043	0.6099	0.6198	0.636	0.658	0.685	0.7158	0.749	0.7831	0.8162	0.8468	0.8737	0.8963	0.9149	0.9305	0.9443	0.9574	0.9706	0.9837	0.9949	1				
YY27	0.4479	0.5085	0.5561	0.5918	0.6148	0.6274	0.6353	0.645	0.659	0.6773	0.6993	0.7242	0.7508	0.7776	0.8033	0.8266	0.8467	0.8635	0.8778	0.8906	0.9034	0.9177	0.9345	0.9539	0.9743	0.992	1			
YY28	0.4297	0.4984	0.5558	0.6015	0.6336	0.653	0.6645	0.6741	0.6853	0.6988	0.7144	0.7315	0.7491	0.7661	0.7815	0.7946	0.8052	0.8137	0.8211	0.8291	0.8395	0.8539	0.8737	0.8993	0.9297	0.9617	0.9885	1		
YY29	0.3998	0.4775	0.5457	0.6032	0.646	0.6735	0.6892	0.6989	0.7069	0.7148	0.7226	0.7302	0.7369	0.7419	0.7448	0.7454	0.744	0.7419	0.7405	0.7418	0.7481	0.7613	0.783	0.8141	0.8543	0.9009	0.948	0.9852	1	
YY30	0.3581	0.4439	0.5228	0.5918	0.6455	0.6814	0.7017	0.7116	0.7162	0.7178	0.7173	0.7145	0.7093	0.7013	0.6905	0.6773	0.6629	0.6488	0.6373	0.6309	0.6318	0.6424	0.6646	0.6997	0.7482	0.8083	0.8747	0.9375	0.9832	1

短期利率波动很大



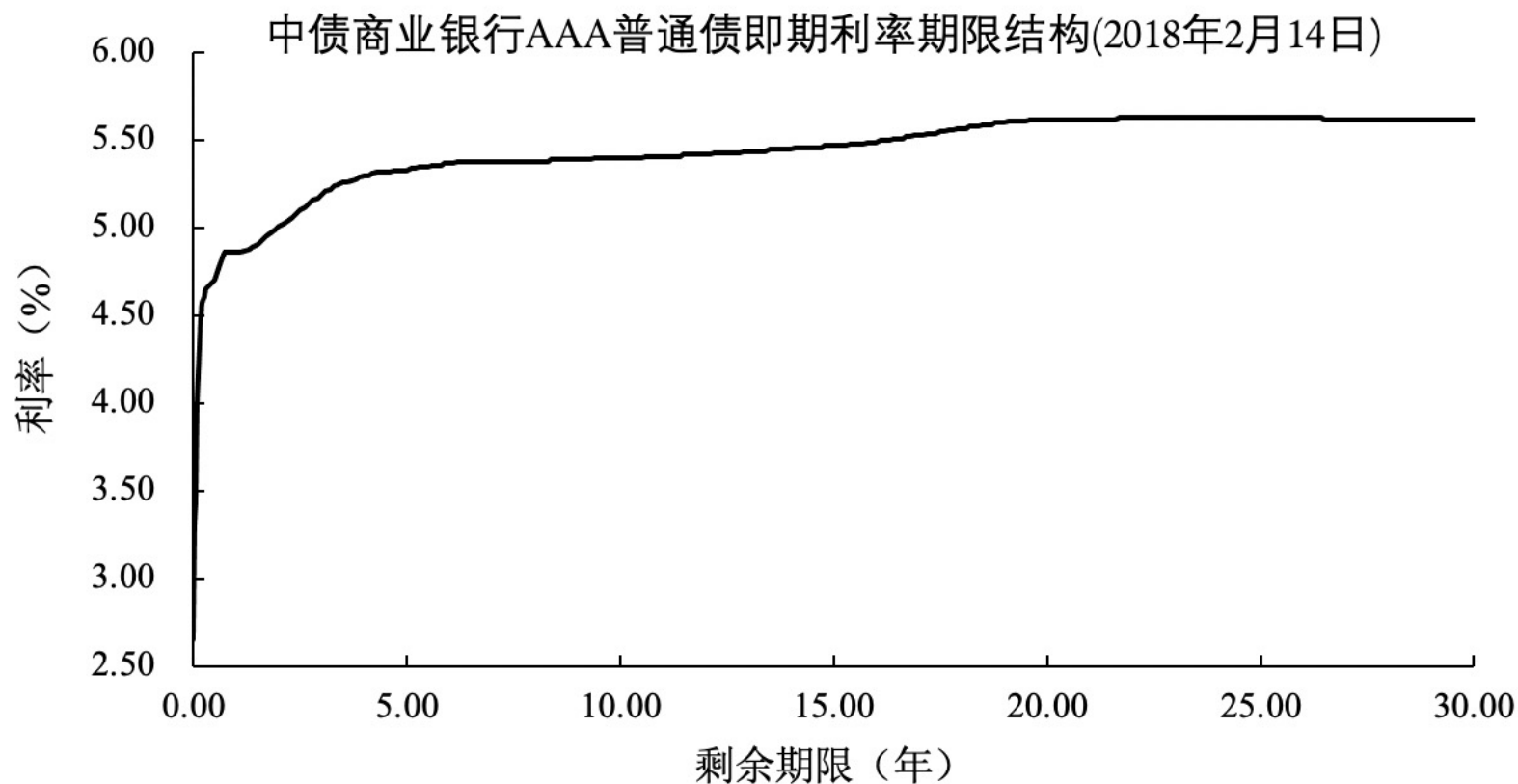
利率期限结构的不同形状：上升



数据来源：Wind 资讯。

图 8.1 不同信用级别的中债即期利率期限结构（2020 年 5 月 13 日）

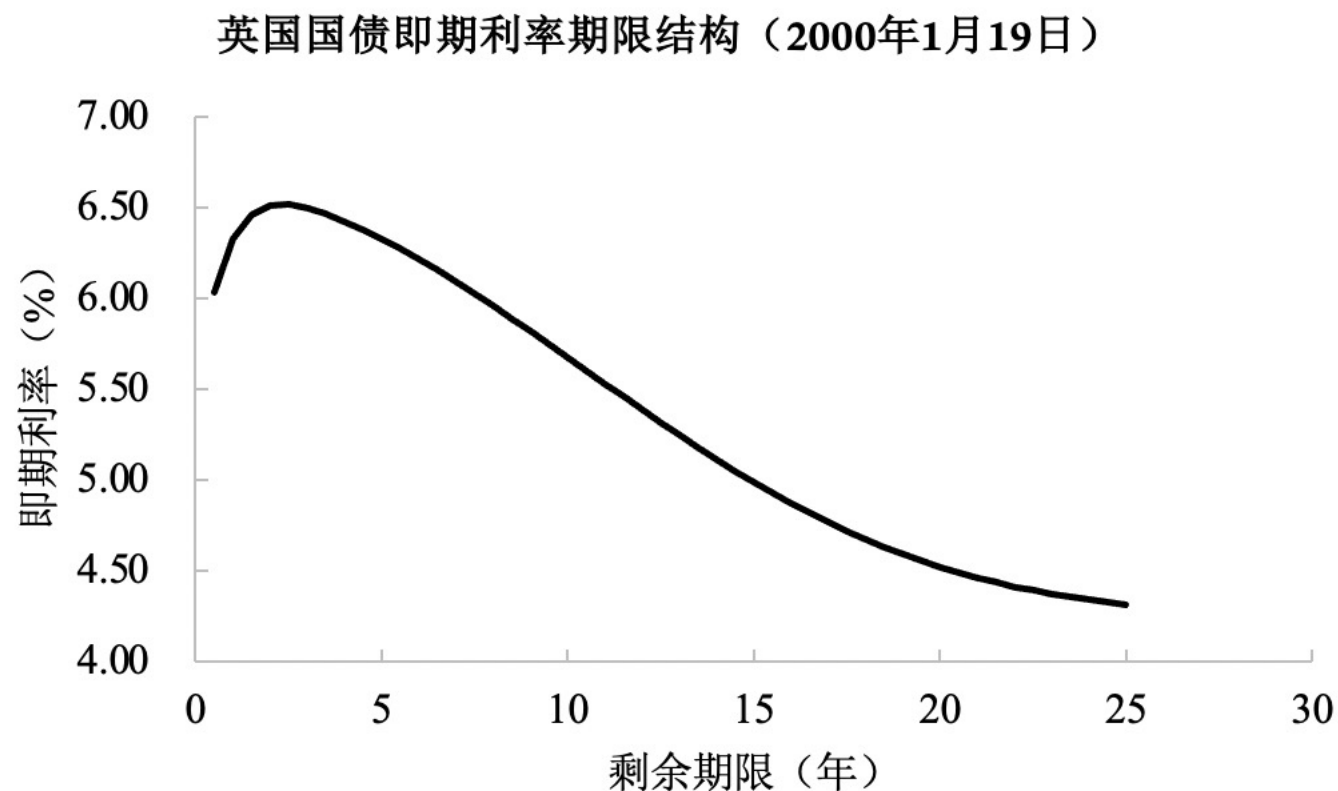
利率期限结构的不同形状：接近水平



数据来源：Wind 资讯。

(a) 接近水平的利率期限结构

利率期限结构的不同形状：下降

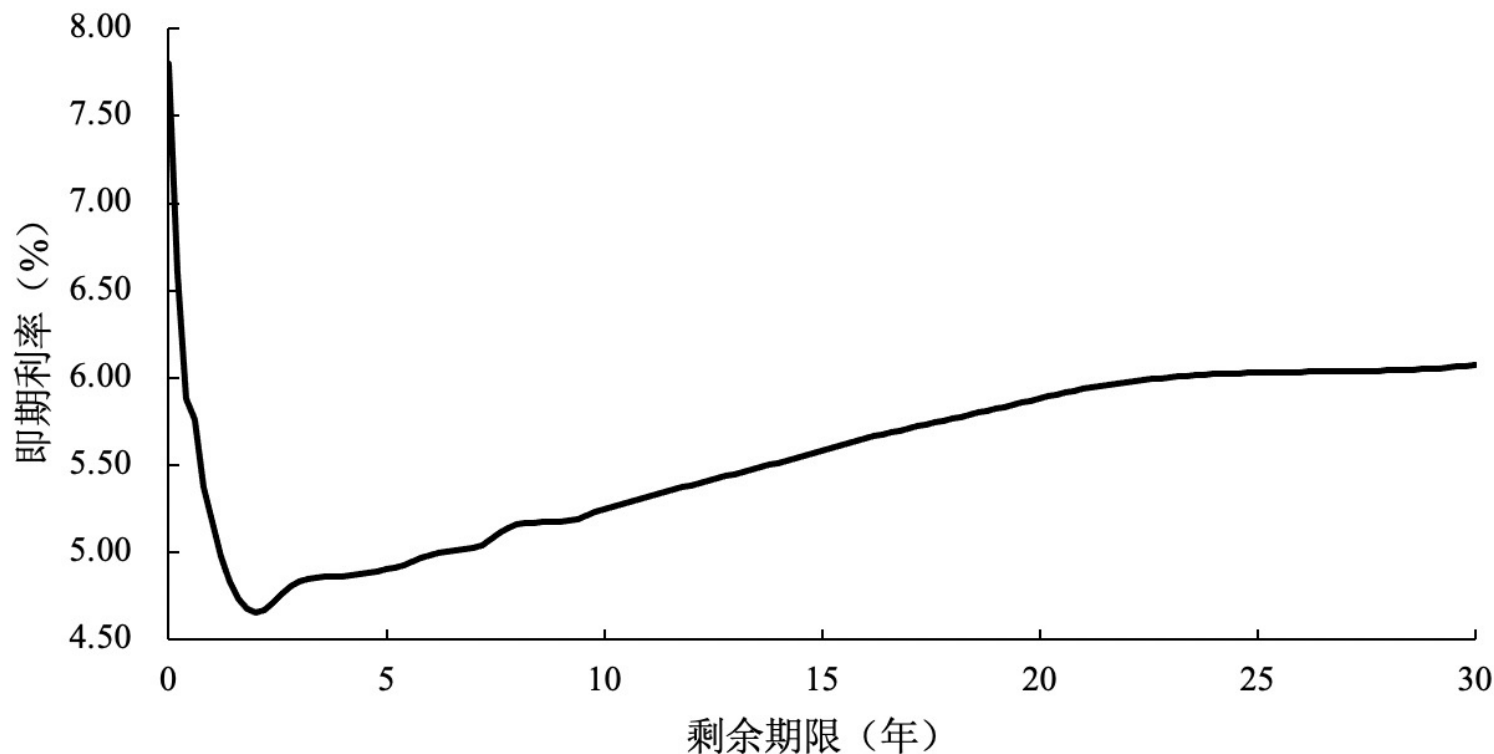


数据来源：欧洲央行。

(b) 下降的利率期限结构

利率期限结构的不同形状：先降后升

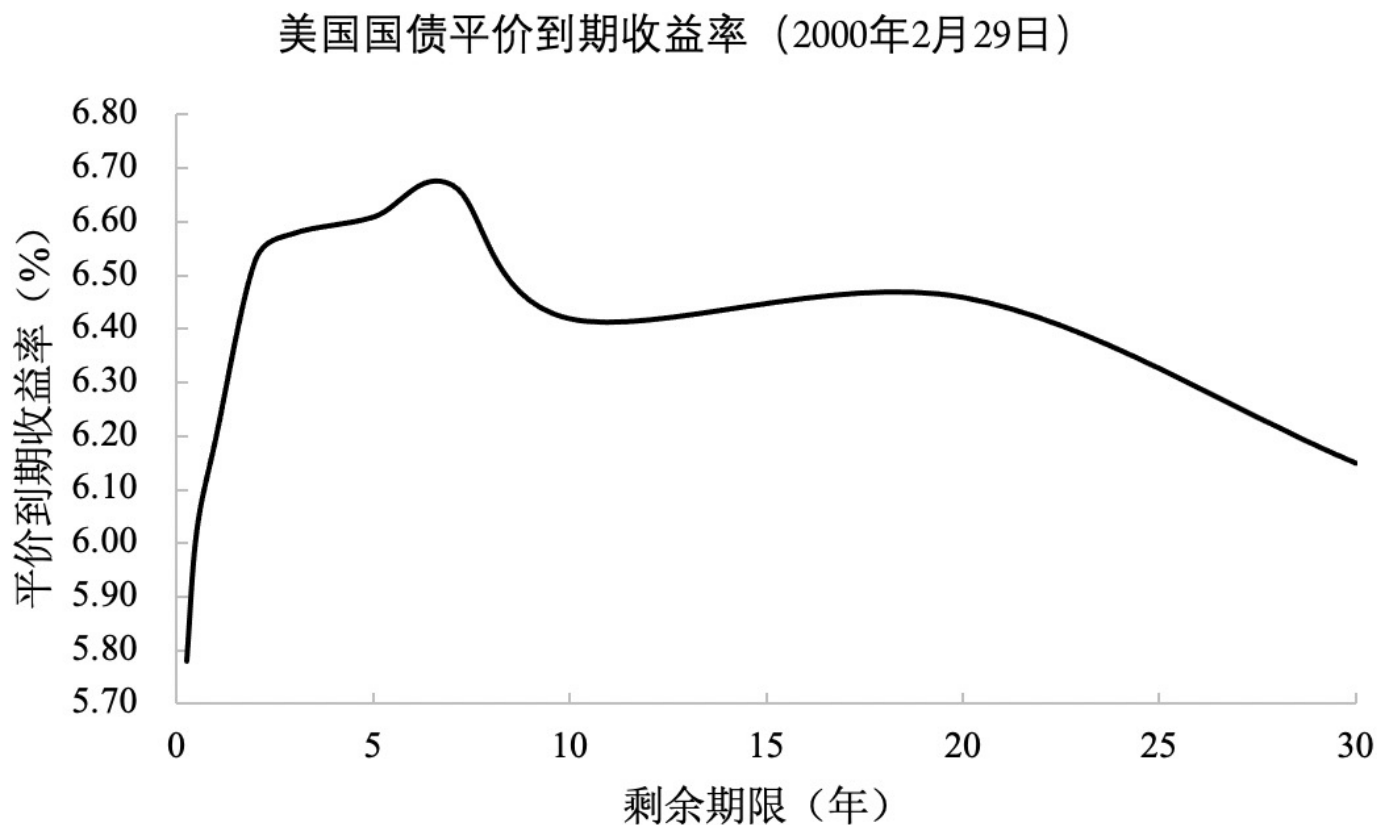
中债AAA企业债即期利率期限结构（2013年6月21日）



数据来源：Wind 资讯。

(c) 先降后升的利率期限结构

利率期限结构的不同形状：先升后降

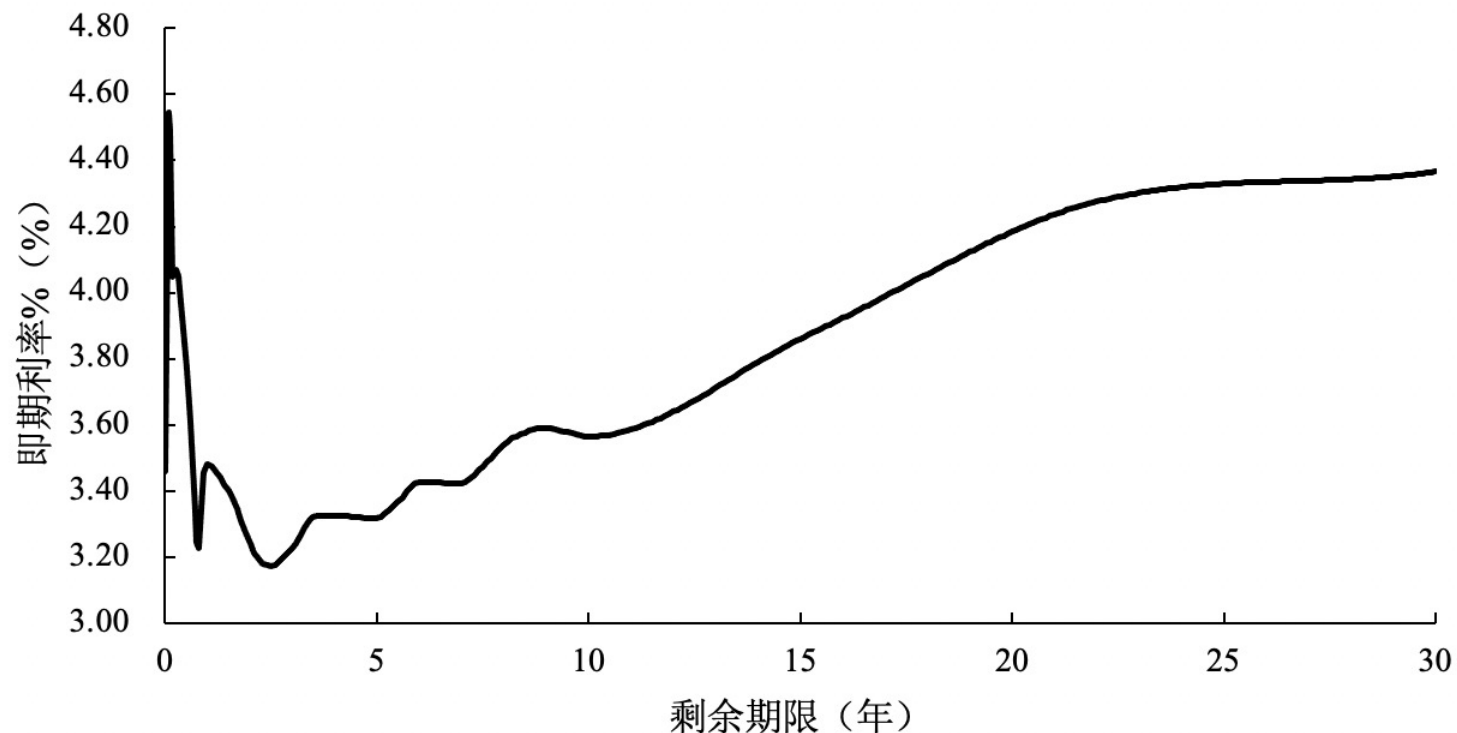


数据来源：美国财政部。

(d) 先升后降的利率期限结构

利率期限结构的不同形状：复杂形状

中债国债即期利率期限结构（2013年6月28日）

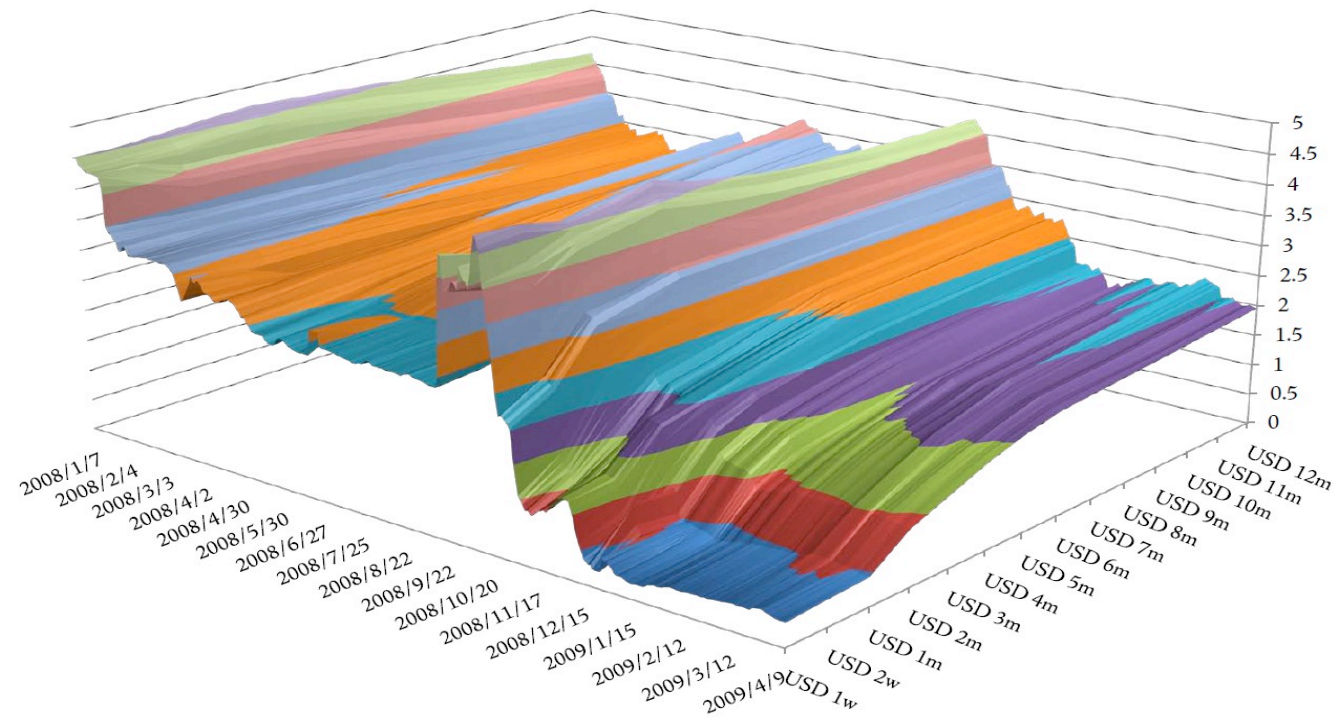


数据来源：Wind 资讯。

(e) 复杂形状的利率期限结构

图 8.2 不同形状的利率期限结构

利率期限结构的动态变化



利率期限结构变动的因子分析

为何需要采用主成分分析？

- * 利率变动非完全相关意味着
 - * 受到共同因素的影响但影响程度有差异
 - * 特定期限利率有特定影响因素
- * 高度相关意味着数据信息高度重合（信息冗余），我们希望找到数量较少的独立因子，来描述利率变动

主成分分析

(principal component analysis, PCA)

- * 一种将给定的一组高度相关的变量（如不同剩余期限的利率的变动）通过线性变换转化为另一组不相关变量的数学方法。
- * 在变换中，保持总方差不变（意味着信息没有丢失），新的变量按方差依次递减的顺序排列，解释了主要方差的前几个成分被称为“主成分”。

F_i 和 X_i 的关系

- F_i 和 X_i 的关系为

$$F_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \cdots + \alpha_{1n}X_n$$

$$F_2 = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \cdots + \alpha_{2n}X_n$$

.....

$$F_n = \alpha_{n1}X_1 + \alpha_{n2}X_2 + \cdots + \alpha_{nn}X_n$$

- 写成向量形式

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\alpha}_1 X_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 X_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n X_n$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})'$

- 或者矩阵形式

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}'\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}'^{-1}\mathbf{F}$$

其中

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)', \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$$

主成分求解

- 因为我们要求 F_i 之间彼此不相关，所以 $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ 的协方差阵 (Ω) 必须为对角阵。
- 用矩阵表示为：

$$\Omega = \text{var}[F] = \text{var}[A'X] = A' \text{var}[X]A = A'\Sigma A$$

- 现在的问题就转化为：如何将 Σ 对角化？

- 对角化原理：

- ▶ n 阶实对称矩阵 Σ 一定能找到一个正交矩阵 A ，使得 $A'\Sigma A$ 为对角阵
- ▶ A 就是依次以 Σ 的 n 个单位正交特征向量为列向量组的矩阵，而转化得到的对角阵 Ω 的主对角线元素就是 A 对应的特征值
- ▶ 而与 Ω 中最大值对应的 A 中列向量即为第一主成分 F_1 方程中的系数。依此类推可以获得 $F_2, \dots, F_n$ 。

利率期限结构变动的主成分分析的一般步骤

- I. 采集不同期限即期利率变动 $\Delta R_t^{t_i}$ 的一段历史数据样本并将其标准化

$$\Delta R_t^{t_i*} = \frac{\Delta R_t^{t_i} - \overline{\Delta R_t^{t_i}}}{\sigma_{\Delta R_t^{t_i}}}$$

- II. 计算不同期限 $\Delta R_t^{t_i}$ 之间的方差—协方差阵 Ω
- III. 计算 Ω 的特征值及其对应的特征向量，将特征向量进行正交化并单位化，计算出互不相关的成分因子，并按特征值大小排序
- IV. 计算不同成分的方差贡献率和累计方差贡献率，并确定主成分

主成分个数的确定

- * 特征值准则

- * 特征值大于等于1的成分

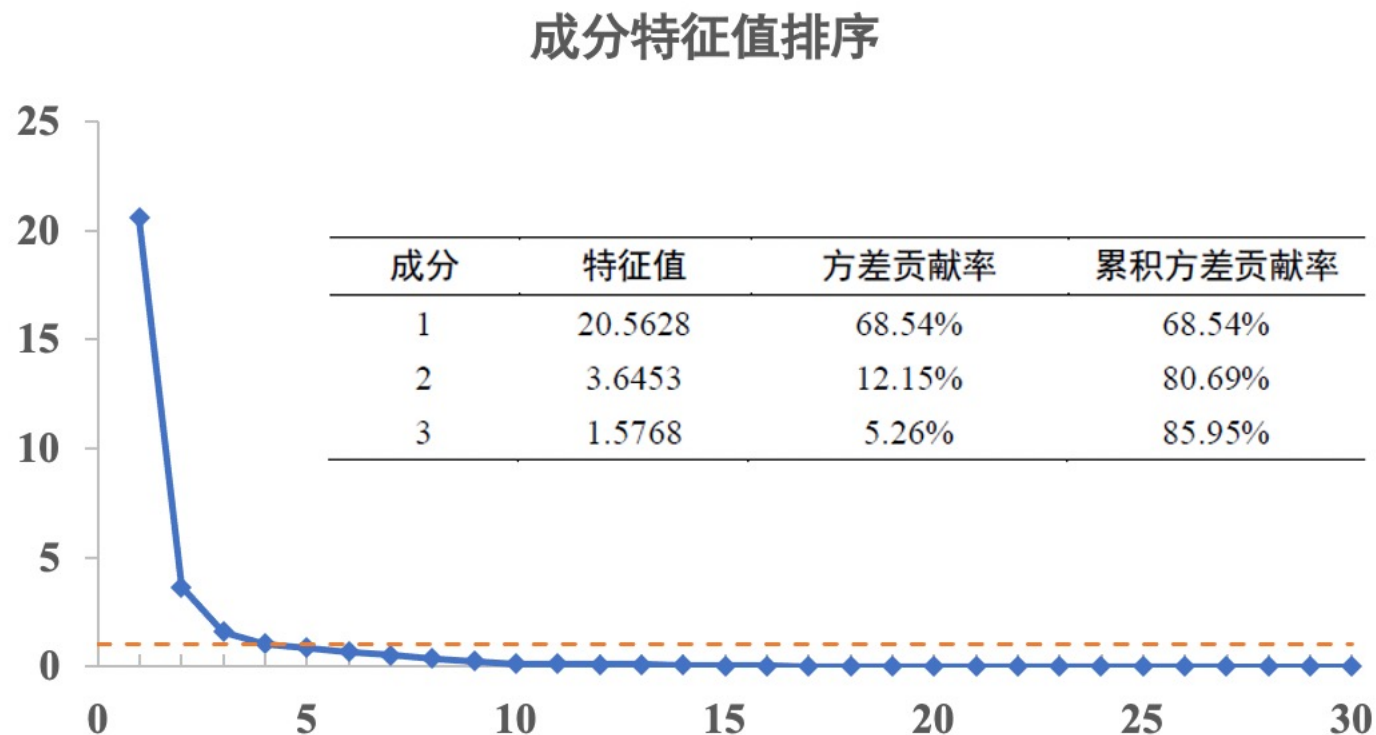
- * 碎石检验准则

- * 曲线开始变平前的一个点

主成分分析的部分研究结果

- * 只需要三个主成份就可以解释全球许多市场利率期限结构90%左右的变动
 - * Barber and Copper (1996) : 1985-1991年美国市场上前三个主成份对利率期限结构的解释能力达到97.11%
 - * Lardic, Priaulet and Priaulet (2003) : 在德国市场、意大利市场和英国市场上, 1998至2000年期间前三个主成份的解释能力分别为90%、90%和93%
 - * 唐革榕和朱峰 (2003) : 2001年8月30日至2002年12月13日上海证券交易所国债利率变动的90.85%也可用前三个主成份来解释

例8.1 中国国债即期利率变化的主成分分析



数据来源：中国债券信息网。

图 8.4 中国国债 1 至 30 年即期利率变化的主成分分析
(2007 年 1 月 4 日至 2020 年 6 月 12 日)

因子分析

* 因子分析方程

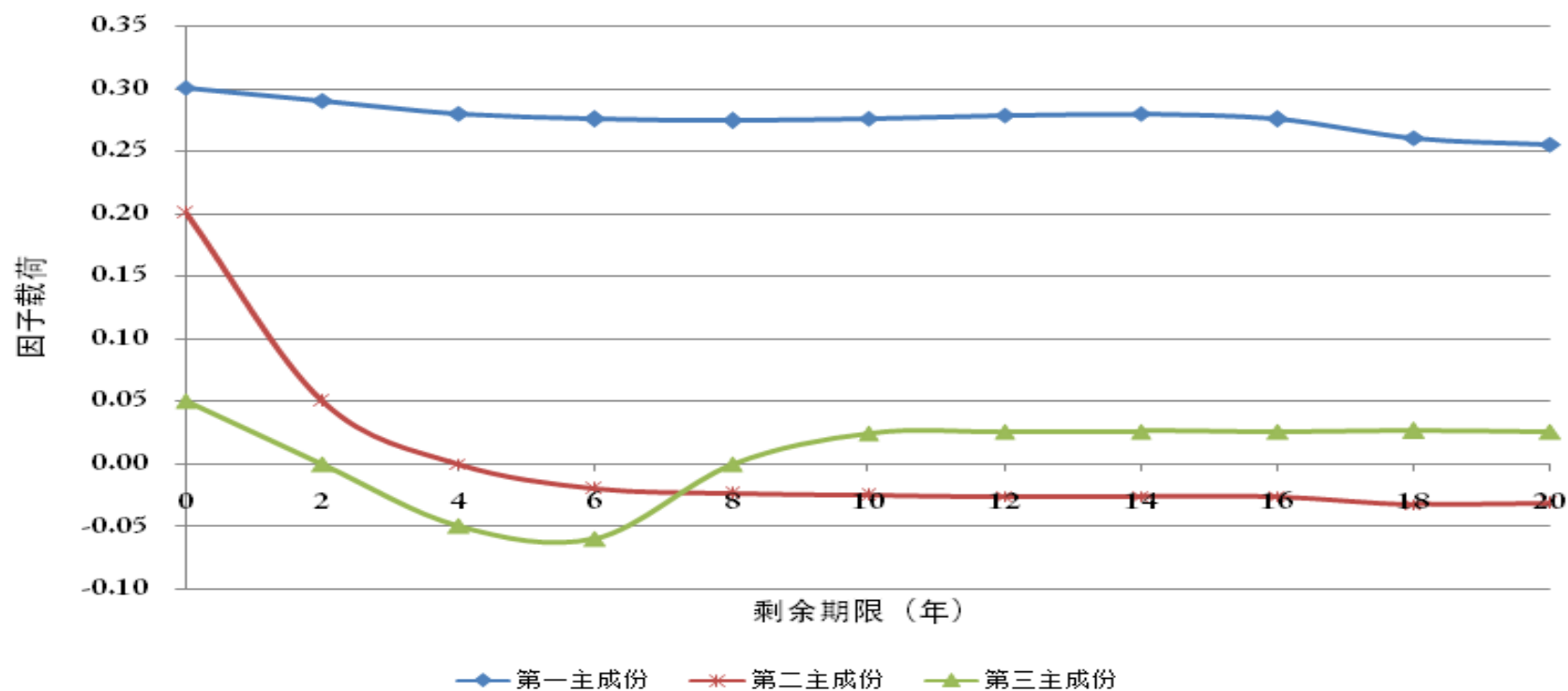
$$\Delta R_t^{t_i^*} = \sum_{j=1}^k (l_{ji} \times F_j^*) + \varepsilon_i$$

* 当因子 F_j 由主成分分析得到时, 系数 l_{ji} 为

$$l_{ji} = \sqrt{\lambda_j} \times \alpha_{ji}$$

* α_{ji} 是式 (8.1) 中 $\Delta R_t^{t_i^*}$ 项的系数。

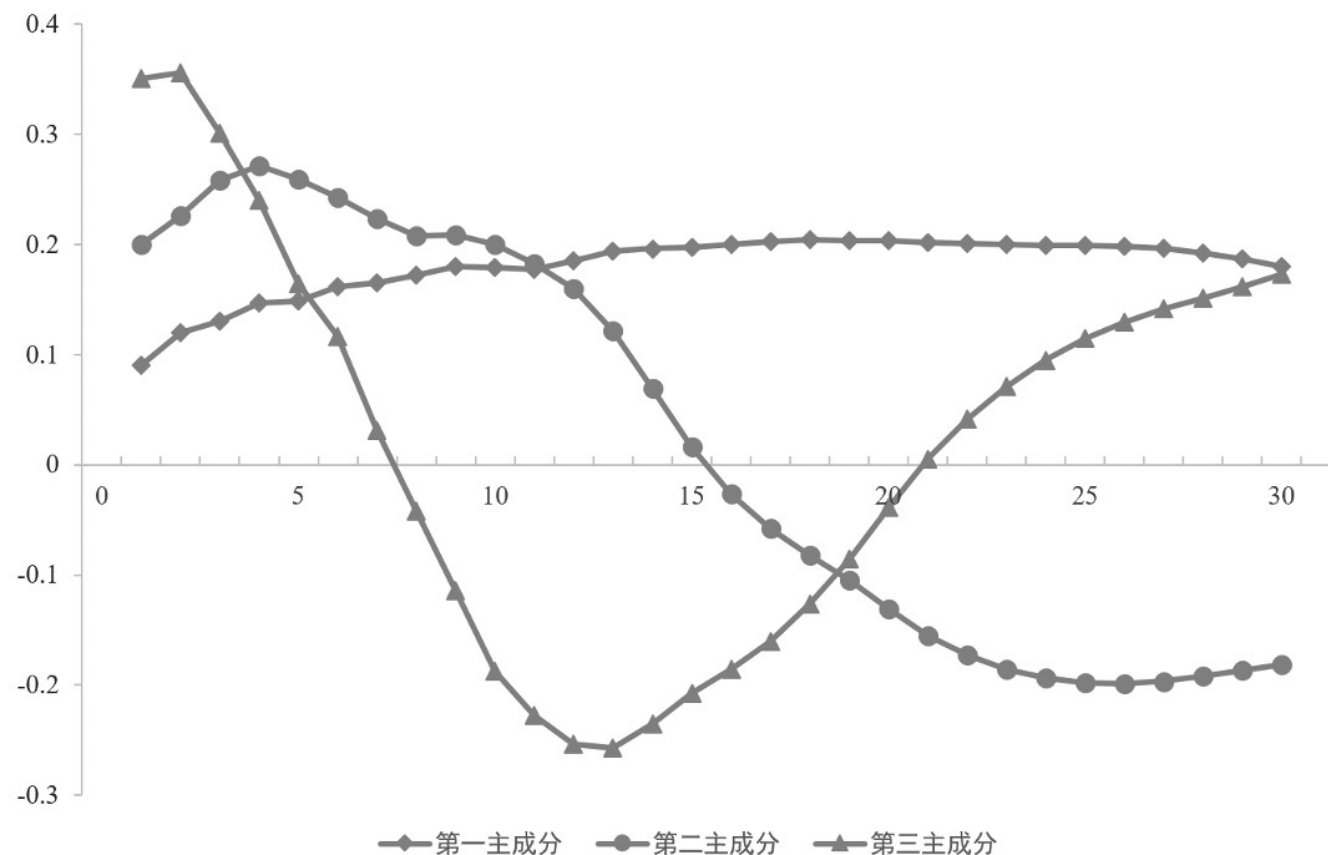
利率期限结构主成分因子载荷示例



利率期限结构变动的因子分析

- * l_1 水平因子：当第一个主成分变动时，不同期限的利率将发生同样幅度的变动。它常常可以解释利率曲线变化的60%—80%
- * l_2 斜率因子：通常会在2—8年之间穿过横轴。这个主成分变动时，长短期利率的变动是不同的。它可用来衡量长短期利率的期限差异，通常可以解释利率曲线变化的5%—30%，许多研究者还发现其对股市等具有很强的解释力
- * l_3 曲度因子：通常呈现蝶形，说明第三个主成分对利率期限结构上的短、中和长期利率具有不同的影响。它一般解释了收益率曲线变化的0%—10%

例8.2 中国国债即期利率变化的因子分析



数据来源：中国债券信息网。

图 8.6 中国国债 1 至 30 年即期利率变化的三个主成分因子载荷
(2007 年 1 月 4 日至 2020 年 6 月 12 日)

传统的利率期限结构理论

纯预期理论 (Pure Expectation Theory)

- * 当前的利率期限结构仅代表了市场对未来即期利率变化的预期
- * 纯预期理论有三个版本

- * 远期利率等于市场对未来即期利率的预期

$$R_t^{t_i, t_j} = \mathbb{E}_t \left[R_{t_i}^{t_j} \right]$$

- * 一次性长期投资的收益率与短期滚动投资的预期收益率相等

$$\frac{1}{\mathbb{E}_t \left[e^{R_{t+1}^{t+n} \cdot (n-1)} \right]} = e^{R_t^{t+1} - R_t^{t+n} \cdot n}$$

- * 1年期零息债的收益率与n年期零息债投资1年的预期收益率相等

$$\mathbb{E}_t \left[\frac{1}{e^{R_{t+1}^{t+n} \cdot (n-1)}} \right] = e^{R_t^{t+1} - R_t^{t+n} \cdot n}$$

纯预期理论的优缺点

- * 考虑了预期
- * 用风险溢酬的观点解读，该理论认为不存在风险溢酬
- * 看似能够解释各种形状的利率期限结构，但并不符合现实
- * 不仅三个版本都没有考虑利率风险溢酬，而且内在并不完全一致

流动性偏好理论(liquidity preference theory)

- * 在纯预期理论的基础上引入了利率风险溢酬的影响，认为长期利率不仅反映利率预期，还包含着投资者要求的利率风险溢酬，只有在长期债券投资收益率能同时涵盖预期未来利率水平和风险溢酬时，投资者才愿意持有长期债券
- * 认为投资者总是偏好易于变现的短期债券，因此利率风险溢酬与剩余期限一定正相关。
- * 可以解释各种形状的利率期限结构，但现实中的风险溢酬并不必然随时间递增，投资者特定的资产状况往往使得他们偏好某些期限债券

市场分割理论(market segmentation theory)

- * 投资者有各自的投资期限偏好，并且偏好不变。利率曲线的形状由短、中和长期市场的各自供求关系决定。
- * 用风险溢酬的观点解读，该理论可以解读为投资者对投资于其他期限所要求的风险溢酬无穷大，从而不改变投资偏好
- * 过于极端

期限偏好理论 (preferred habitat theory)

- * 流动性偏好理论和市场分割理论的结合
- * 期限偏好理论认为不同投资者首先有特定期限的偏好，但当不同期限的债券供求发生变化，风险溢价变化至足以抵消预期的利率风险时，一些投资者的偏好就会发生转移。
- * 用风险溢价的观点解读，该理论认为利率期限结构取决于预期和时变的风险溢价，时变的风险溢价又取决于期限偏好和利率风险
- * 但该理论并未明确是什么具体的风险溢价

利率期限结构理论评析

- * 流动性偏好和期限偏好理论都认为长期利率反映了市场对未来的预期和风险溢价，都被称为“有偏期望理论”（biased expectation theory）。
- * 相对于流动性偏好理论，期限偏好理论引入了投资者的期限偏好，并认为风险溢价并非简单随期限递增；相对于市场分割理论，期限偏好理论则加入了市场预期和风险溢价的思想。
- * 市场表现：不同投资期限的资金供求及其变化
- * 影响预期和风险溢价的重要因素：宏观经济和货币政策

期限溢价 (Term Premium)

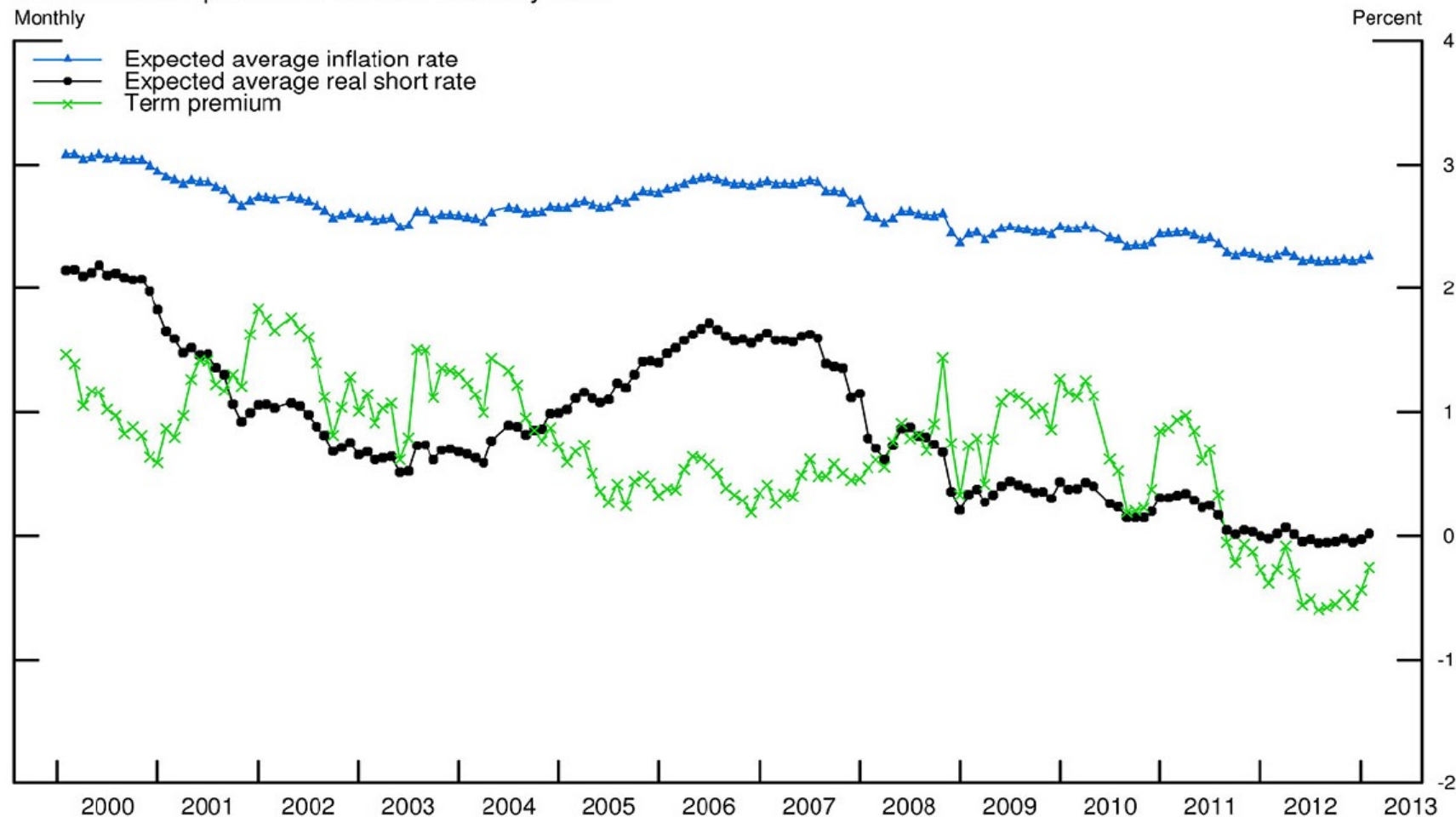
- * 利率风险溢价被称为“期限溢价”，是指投资者在投资债券时，由于在投资结束前面临利率变动带来的市场风险而要求的风险补偿。
- * 无风险长期利率扣除预期值之后的部分
- * 帮助理解利率期限结构的形成和变化规律
 - * 货币政策：格林斯潘之谜
 - * 预测利率变化
 - * 投融资决策
 - * 固定收益证券定价与风险管理

格林斯潘之谜

- * 1999年，联邦利率的增加伴随着长期利率一对一上升
- * 2004年6月到2006年6月，美联储将联邦利率从1.25%提升至5.25%。但美国10年期国债的收益率在此期间却是下降的
- * Kim and Wright(2005)：三因子无套利仿射模型；期限溢酬的影响
- * Bernanke(2013)：美国10年期国债收益率近年来的下降应主要归因于2010年以来期限溢价的急剧下降。

Bernanke : decompose longer-term yields

Chart 2. Decomposition of 10-Year Treasury Yield



Source: Ben S. Bernanke , Long-term Interest Rates, Mar. 1, 2013

纯预期理论的3个版本

- * 远期利率等于市场对未来即期利率的预期

$$R_t^{t_i, t_j} = \mathbb{E}_t \left[R_{t_i}^{t_j} \right]$$

- * 一次性长期投资的收益率与短期滚动投资的预期收益率相等

$$\frac{1}{\mathbb{E}_t \left[e^{R_{t+1}^{t+n} \cdot (n-1)} \right]} = e^{R_t^{t+1} - R_t^{t+n} \cdot n}$$

- * 1年期零息债的收益率与n年期零息债投资1年的预期收益率相等

$$\mathbb{E}_t \left[\frac{1}{e^{R_{t+1}^{t+n} \cdot (n-1)}} \right] = e^{R_t^{t+1} - R_t^{t+n} \cdot n}$$

Term Premium的估计

* 基于远期利率的期限溢价

$$TPF_t^{1,n} = R_t^{t+1,t+n} - \mathbb{E}_t[R_{t+1}^{t+n}]$$

* 基于即期利率的期限溢价（版本2的近似）

$$TPY_t^{1,n} = R_t^{t+n} - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_t[R_{t+i}^{t+i+1}]$$

* 基于持有期收益率的期限溢价（超额收益，版本3的近似）

$$\begin{aligned} TPR_t^{1,n} &= \mathbb{E}_t \left[\ln \frac{B_{t+1}^{t+n}}{B_t^{t+n}} \right] - R_t^{t+1} \\ &= nR_t^{t+n} - (n-1)\mathbb{E}_t[R_{t+1}^{t+n}] - R_t^{t+1} \end{aligned}$$

利率期限结构的估计

市场曲线与隐含曲线

- * 市场曲线：YTM和互换利率曲线

- * 隐含曲线：

- * 即期利率、平价到期收益率、远期利率和瞬时远期利率曲线

拟合利率期限结构的准备工作

* 构建可靠的数据库

- * 被用于估计同一条收益率曲线的债券必须具有相同的信用等级和税收待遇等条件，以保证这些债券的惟一差异就是剩余期限
- * 剔除含权证券
- * 剔除明显定价不合理、流动性差异很大（包括与其他样本相比，流动性过差或流动性过好）的证券
- * 所选证券的剩余期限应尽可能覆盖要估计时间长度的各个区间（短期、中期和长期），且各个分段区间内的样本数要足够多，以保证结果的可靠性。

无风险即期利率期限结构的估计

- * 方法分类

- * 散点（靴襻法）+ 插值

- * 拟合

- * 评价利率期限结构拟合方法的标准

- * 准确性

- * 平滑性

- * 稳定性

- * 灵活性

获得利率散点

* 靴襻法/息票剥离法

- * 利用付息债等于零息债组合的原理，对付息债进行分解，提取出相应的贴现因子价格和即期利率。
- * 本质是求解债券定价方程组

* 主要问题

- * 不同债券的付息日通常不会刚好相同。可以将相近的付息日视为同一天进行近似估计
- * 市场上债券数量通常不会刚好等于付息日数量
 - * 一种做法是选择其中部分数量匹配的债券和付息日
 - * 另一种做法：Carleton and Cooper (1976)

例8.3 估计利率期限结构：靴襻法

假设有 4 只付息日相同的债券（一年支付一次利息）如下：

	息票	剩余期限（年）	市场价格
债券 1	3	1	99
债券 2	3.5	2	99.5
债券 3	3	3	96
债券 4	4	4	95

由债券定价公式可写出如下矩阵

$$\begin{pmatrix} 99 \\ 99.5 \\ 96 \\ 95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 & \square & \square & \square \\ 3.5 & 103.5 & \square & \square \\ 3 & 3 & 103 & \square \\ 4 & 4 & 4 & 104 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_0^1 \\ B_0^2 \\ B_0^3 \\ B_0^4 \end{pmatrix}$$

其中方程左边是债券的市场价格，债券右边是这 4 个债券的现金流矩阵，从而可以求解得到 4 个期限的贴现因子。

再进一步根据贴现因子与连续复利即期利率的关系，

$$R_0^{t_i} = -\frac{1}{t_i} \ln B_0^{t_i}$$

可算出相应 1 至 4 年期连续复利的即期利率分别为 3.96%、3.69%、4.38%和 5.36%。

插值法

* 线性插值

$$R_t^{t_2} = \frac{(t_3 - t_2)R_t^{t_1} + (t_2 - t_1)R_t^{t_3}}{t_3 - t_1}$$

* 三次多项式样条插值

* Hermit插值/样条插值

例8.4估计利率期限结构：线性插值法

已知3个月、6个月、1年、1.5年和2年期的即期利率分别为3%、3.6%、3.9%、4%和4.2%（连续复利）。一个2.75年后到期、半年支付一次4%票息的债券当前市场价格为100.69元。请问如何求得9个月、1.25年、1.75年、2.25年和2.75年期利率水平？

在线性插值法下，两个期限之间的利率被认为位于两端利率水平连接形成的直线上。因此，0.75年（9个月）的利率被认为位于0.5年和1年期利率水平连接形成的直线上，这意味着利率差之比等于期限差之比，因此有

$$\frac{R_0^{0.75} - R_0^{0.5}}{R_0^1 - R_0^{0.5}} = \frac{0.25}{0.5}$$

可以得到0.75年期利率为3.75%。以此类推，1.25年期和1.75年期的利率分别为3.95%和4.1%。

接下来，如何得到2.25年期和2.75年期的利率？如果假设2.25年期利率位于2年期利率和2.75年期利率形成的直线上，就有

$$\frac{R_0^{2.25} - R_0^2}{R_0^{2.75} - R_0^2} = \frac{0.25}{0.75}$$

从而2.75年期利率可以用2.25年期利率表示为

$$R_0^{2.75} = 3R_0^{2.25} - 2R_0^2$$

由于剩余期限为2.75年的债券价格可以表示为

$$2e^{-3\% \times 0.25} + 2e^{-3.75\% \times 0.75} + 2e^{-3.95\% \times 1.25} + 102e^{-4.1\% \times 1.75} + 2e^{-R_0^{2.25} \times 2.25} + 102e^{-R_0^{2.75} \times 2.75} = 101$$

代入前述2.25年和2.75年期利率之间的关系，可以求得2.25年期利率为4.16%，相应地2.75年期利率为4.08%。

分段三次多项式插值

*

* 分段三次多项式

$$R_0^s = \begin{cases} a_1 s^3 + b_1 s^2 + c_1 s + d_1, s \in (0, t_1) \\ a_2 s^3 + b_2 s^2 + c_2 s + d_2, s \in (t_1, t_2) \\ \dots \dots \\ a_N s^3 + b_N s^2 + c_N s + d_N, s \in (t_{N-1}, t_N) \end{cases}$$

例8.5 估计利率期限结构：三次多项式插值法

如前例，已知 0.5 年、1 年、1.5 年和 2 年期即期利率分别为 3.6%、3.9%、4%和 4.2%（连续复利）。为了运用三次多项式插值构造利率曲线，假设 0 到 2 年的利率期限结构满足如下三次多项式：

$$R_0^s = as^3 + bs^2 + cs + d$$

其中 s 表示利率期限。

节点 0.5 年、1 年、1.5 年和 2 年的即期利率都应满足这一函数，即

$$\begin{cases} R_0^{0.5} = 3.6\% = a \cdot (0.5)^3 + b \cdot (0.5)^2 + c \cdot 0.5 + d \\ R_0^1 = 3.9\% = a \cdot (1)^3 + b \cdot (1)^2 + c \cdot 1 + d \\ R_0^{1.5} = 4\% = a \cdot (1.5)^3 + b \cdot (1.5)^2 + c \cdot 1.5 + d \\ R_0^2 = 4.2\% = a \cdot (2)^3 + b \cdot (2)^2 + c \cdot 2 + d \end{cases}$$

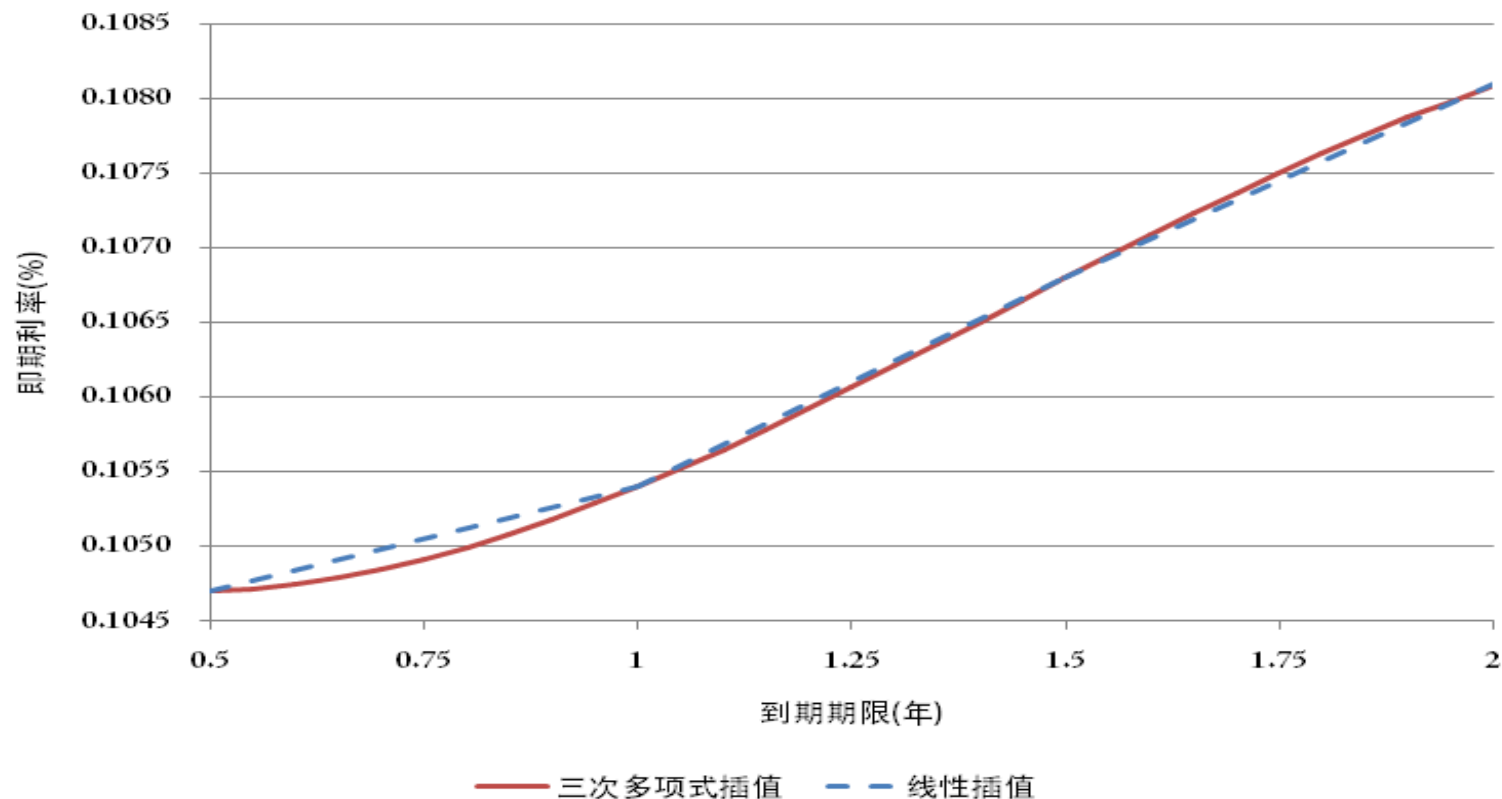
由此可以解得 $a = 0.004$, $b = -0.016$, $c = 0.023$, $d = 0.028$ 。这样 1-2 年间任意期限的

即期利率可用该三次多项式求出。例如，0.75 年的即期利率就等于

$$R_0^{0.75} = 0.004 \cdot (0.75)^3 + (-0.016) \cdot (0.75)^2 + 0.023 \cdot 0.75 + 0.028 \approx 3.79\%$$

类似可以求得 1.25 年期和 1.75 年期的利率分别为 3.96%和 4.07%。

线性插值与分段三次多项式插值



分段三次多项式插值

- * 只需要4个已知利率即可生成利率曲线——分段
- * S型曲线——凹凸性给定
- * 衔接点不平滑

高次多项式插值

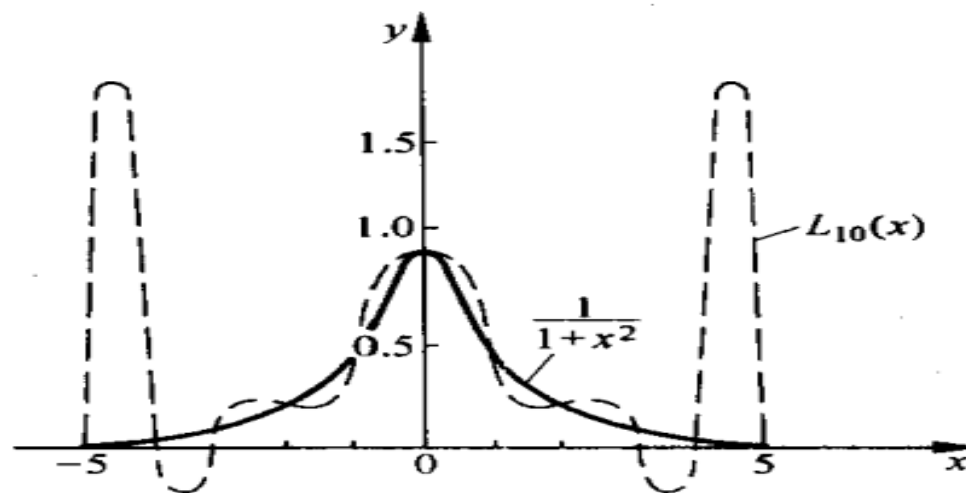
- * 与线性插值法相比，高次多项式插值在节点内部能获得更为光滑的曲线
- * 阶数 (degree) 的选择：精确度与复杂性的权衡
 - * 并非阶数越高逼近越好 (Runge现象)
 - * 三次可以保证函数连续和二阶可导
- * 插值目标的设定
 - * 节点值相等
 - * 连接点处的导数值约束
- * 分段的数量
- * 连接点的位置

Runge现象

* 高次多项式曲线波动较大，且插值的收敛性可能存在问题

* 与其10次Lagrange插值多项式

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5, 5]$$



样条

- * 样条 (spline) 在英语中是指富有弹性的细长木条。样条曲线是指工程师在制图时，用压铁将样条固定在样点上，其它地方让它自由弯曲，然后画下的长条曲线。
- * 样条函数的数学实质是由一些按照某种光滑性条件分段拼接起来的多项式组成的函数，保证分段内光滑、在各段连接处也具有光滑性的函数，其目的是用这些分段函数尽可能地逼近一定的曲线。
- * 根据Weierstrass第一逼近定理，任何连续函数都可以被一个多项式函数任意接近地逼近，这为样条函数的运用提供了基本依据

Hermite三次样条插值

* 目标：节点值和一阶导相等

* 次数：三次

$$H(s) = R_0^{s_i} \alpha_i \left(\frac{s-s_i}{s_{i+1}-s_i} \right) + R_0^{s_{i+1}} \alpha_{i+1} \left(\frac{s-s_i}{s_{i+1}-s_i} \right) \\ + R_0^{s_i'} \beta_i \left(\frac{s-s_i}{s_{i+1}-s_i} \right) (s_{i+1} - s_i) + R_0^{s_{i+1}'} \beta_{i+1} \left(\frac{s-s_i}{s_{i+1}-s_i} \right) (s_{i+1} - s_i)$$

其中,

$$\alpha_i(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad \alpha_{i+1}(x) = -2x^3 + 3x^2, \\ \beta_i(x) = x^3 - 2x^2 + x, \quad \beta_{i+1}(x) = x^3 - x^2$$

Bessel三次样条插值

*

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0'^{s_0} = \frac{1}{s_2 - s_0} \left[\frac{(s_2 + s_1 - 2s_0)(R_0^{s_1} - R_0^{s_0})}{s_1 - s_0} - \frac{(s_1 - s_0)(R_0^{s_2} - R_0^{s_1})}{s_2 - s_1} \right] \\ R_0'^{s_i} = \frac{1}{s_{i+1} - s_{i-1}} \left[\frac{(s_{i+1} - s_i)(R_0^{s_i} - R_0^{s_{i-1}})}{s_i - s_{i-1}} + \frac{(s_i - s_{i-1})(R_0^{s_{i+1}} - R_0^{s_i})}{s_{i+1} - s_i} \right] \\ R_0'^{s_N} = \frac{1}{s_N - s_{N-2}} \left[\frac{(s_N - s_{N-1})(R_0^{s_{N-1}} - R_0^{s_{N-2}})}{s_{N-1} - s_{N-2}} - \frac{(2s_N - s_{N-1} - s_{N-2})(R_0^{s_N} - R_0^{s_{N-1}})}{s_N - s_{N-1}} \right] \end{array} \right.$$

三次样条插值

* 目标：节点值相等、一阶二阶连续导数

* 次数：三次

* 插值条件： $C(s_i) = R_0^{s_i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$

* 连接条件： $C(s_i - 0) = C(s_i + 0)$

$$C'(s_i - 0) = C'(s_i + 0)$$

$$C''(s_i - 0) = C''(s_i + 0)$$

* 边界条件

(a) 令整条利率曲线两端的一阶导数与已知值相等： $C'(s_0) = R_0^{s_0}$, $C'(s_N) = R_0^{s_N}$;

(b) 令整条利率曲线两端的二阶导数与已知值相等： $C''(s_0) = R_0^{s_0}$, $C''(s_N) = R_0^{s_N}$ 。

拟合法

- * 首先设定贴现函数 $B(0,s)$ 或即期利率函数 $R(0,s)$ 为剩余期限 s 的函数

$$B_0^s = f(s; \boldsymbol{\beta}_1)$$

$$R_0^s = g(s; \boldsymbol{\beta}_2)$$

- * 第二步，在 $B_0^0 = 1$ （立刻到期的零息票债券价格为1）的约束条件下，令定价误差的平方和最小估计出参数向量 β_1 或 β_2

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_l = \underset{\hat{\boldsymbol{\beta}}_l}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^N (P^j - V^j)^2, l = 1, 2$$

- * 第三步，写出贴现函数或即期利率函数的最终形式，得到利率期限结构
- * 可分为贴现因子函数法和即期利率函数法

贴现因子函数的形式设定

- * 贴现函数通常被设定为样条函数 (spline functions)
- * 在贴现函数的设定中, 常用的样条函数包括三次多项式样条、三次基样条 (B-Spline) 和三次指数样条。

三次多项式样条函数-I

* 假设以5年和15年作为分界点，构造三次样条函数

$$* B_0^s = \begin{cases} (B_0^s)_1 = a_1 s^3 + b_1 s^2 + c_1 s + d_1 & \forall s \in [0, 5] \\ (B_0^s)_2 = a_2 s^3 + b_2 s^2 + c_2 s + d_2 & \forall s \in [5, 15] \\ (B_0^s)_3 = a_3 s^3 + b_3 s^2 + c_3 s + d_3 & \forall s \in [15, 30] \end{cases}$$

* 约束条件：

$$* \text{保证分段点的平滑} \begin{cases} (B_0^5)_1^{(i)} = (B_0^5)_2^{(i)} \\ (B_0^{15})_2^{(i)} = (B_0^{15})_3^{(i)} \end{cases}$$

* 马上到期的贴现因子应等于1，即 $B_0^0 = 1$

三次多项式样条函数-II

* 将这两组约束代入, 有

$$B_0^s = \begin{cases} (B_0^s)_1 = a_1 s^3 + b_1 s^2 + c_1 s + d_1 & \forall s \in [0, 5] \\ (B_0^s)_2 = a_1 [s^3 - (s-5)^3] + a_2 (s-5)^3 + b_1 s^2 + c_1 s + 1 & \forall s \in [5, 15] \\ (B_0^s)_3 = a_1 [s^3 - (s-5)^3] + a_2 [(s-5)^3 - (s-15)^3] + a_3 (s-5)^3 + b_1 s^2 + c_1 s + 1 & \forall s \in [15, 30] \end{cases}$$

* 将待估参数由12个降低到5个

$$\boldsymbol{\beta} = (a_1, b_1, c_1, a_2, a_3)$$

三次B样条

$$B_0^s = \sum_{k=-3}^2 \beta_k L_k^3(s)$$

是6个三次基样条函数的加权平均

$$L_k^3(s) = \sum_{j=k}^{k+4} \left(\prod_{i=k, i \neq j}^{k+4} \frac{1}{t_i - t_j} \right) (s - t_j)_+^3$$
$$t_{-3} < t_{-2} < t_{-1} < t_0 = 0 < t_1 = 5 < t_2 = 15 < t_3 = 30 < t_4 < t_5 < t_6$$

* 待估参数为

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_{-3}, \beta_{-2}, \beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$$

三次B样条方法评析

- * 三次基样条函数是三次样条空间中最基本的基函数，相应区间上的任意三次多项式样条都可以由三次基样条特定的线性组合构造出来
- * 三次基样条函数实际上是用逐渐推移的多个基础三次函数的组合来构造出复杂的分段三次函数，与普通的三次多项式样条相比，其精确性大大提高
- * 该函数形式看似复杂，但实际上只有6个待估参数，稳定的参数估计比较容易实现

三次指数样条

* 三次指数样条函数

$$B_0^s = \begin{cases} (B_0^s)_1 = a_1 e^{-3us} + b_1 e^{-2us} + c_1 e^{-us} + d_1 & \forall s \in [0, 5] \\ (B_0^s)_2 = a_2 e^{-3us} + b_2 e^{-2us} + c_2 e^{-us} + d_2 & \forall s \in [5, 15] \\ (B_0^s)_3 = a_3 e^{-3us} + b_3 e^{-2us} + c_3 e^{-us} + d_3 & \forall s \in [15, 30] \end{cases}$$

* 约束条件

$$\begin{cases} (B_0^5)_1^{(i)} = (B_0^5)_2^{(i)} \\ (B_0^{15})_2^{(i)} = (B_0^{15})_3^{(i)} \end{cases}$$

* 三次指数样条的简化形式

$$* B_0^s = \begin{cases} (B_0^s)_1 = a_1 e^{-3us} + b_1 e^{-2us} + c_1 e^{-us} + d_1 & \forall s \in [0, 5] \\ (B_0^s)_2 = a_1 [e^{-3us} - (e^{-us} - e^{-5u})^3] + a_2 (e^{-us} - e^{-5u})^3 + b_1 e^{-2us} + c_1 e^{-us} + d_1 & \forall s \in [5, 15] \\ (B_0^s)_3 = a_1 [e^{-3us} - (e^{-us} - e^{-5u})^3] + a_2 [(e^{-us} - e^{-5u})^3 - (e^{-us} - e^{-15u})^3] + a_3 (e^{-us} - e^{-15u})^3 + b_1 e^{-2us} + c_1 e^{-us} + d_1 & \forall s \in [15, 30] \end{cases}$$

* 共有7个待估参数

$$\boldsymbol{\beta} = (a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, a_3, u)$$

* (Shea, 1985) 待估参数 u 是未来无限远时的瞬时远期利率

贴现函数设定中的一些问题

- * 阶数 (degree) 的选择：精确度与复杂性的权衡
 - * 三次最常见，可以保证函数连续和二阶可导
- * 样条数量的选择
 - * 样条数量越多，拟合越好，但缺点在于曲线的平滑性较差，此外也较容易受到奇异点的影响
- * 节点位置的选择
 - * 节点最好使得每段区间具有一定的经济含义，且样本数量要较为接近

参数校准

- * 在线性回归中，回归系数的最小二乘估计就是使得回归方程残差平方和最小的系数值。因此，只要对贴现函数形式的设定使得理论价值能表达为参数的线性形式，参数的校准过程就等价于对回归方程的线性回归过程

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \mathbf{0}, \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I} \\ \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \sigma^2 \boldsymbol{\Omega} = \sigma^2 \begin{bmatrix} w_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

线性回归

* 无论样条函数形式看起来多么复杂，这些贴现函数实际上都是参数的线性函数，从而相应的债券价格也将是参数的线性函数。

* 例如，三次多项式样条函数形式下，一个2年后到期、一年支付一次3%票息的付息债模型价格可以写为

$$V = 3 \cdot B_0^1 + 103 \cdot B_0^2 = 827a_1 + 415b_1 + 209c_1 + 106$$

* 付息债又是零息债的线性组合，从而不含权债券的价格总是可以表达为参数的线性函数。

参数校准中的问题：异方差

- * 直接假设方差大小与债券剩余期限的平方成比例

$$w_j^2 = T_j^2$$

- * 债券定价误差的方差大小与该债券对利率变动敏感性的平方成正比（Vasicek and Fong, 1982）

$$w_j^2 = \left(\frac{dP^j}{dy^j} \right)^2 = (D^j P^j)^2$$

参数校准中的问题：约束条件

* 基本约束条件： $B_0^0 = 1$

* 约束条件下的GLS估计量为

$$\hat{\beta}^* = \hat{\beta} + (X^T \Omega^{-1} X)^{-1} \Gamma (\Gamma^T (X^T \Omega^{-1} X)^{-1} \Gamma)^{-1} (1 - \Gamma^T \hat{\beta})$$
$$\hat{\beta} = (X^T \Omega^{-1} X)^{-1} X^T \Omega^{-1} P$$

比较

- * 样条函数既可以运用在插值法中，也可以运用在拟合法中。但由于插值法和拟合法的差异，在插值法中运用时，直接将即期利率设定为样条函数，要求样条函数必须过已知点，以此倒求出函数的参数；在贴现因子拟合法中运用时，则是将贴现因子设定为样条函数，并不要求样条函数过已知点，而是运用定价误差平方和最小校准得到函数参数。

即期利率函数法

- * 贴现函数法的缺陷之一在于参数经济含义不明确
- * 大多数即期利率函数都是从利率期限结构动态模型推导而来。
- * 最常见的是Nelson-Siegel (NS) 模型和Nelson-Siegel-Svensson (NSS) 模型。

即期利率函数法：NS模型

* Nelson and Siegel (1987)

$$R_0^s = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\frac{s}{m}}}{s/m} + \beta_2 \left[\frac{1 - e^{-\frac{s}{m}}}{s/m} - e^{-\frac{s}{m}} \right]$$

NS参数的经济含义

$$R_0^s = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\frac{s}{m}}}{s/m} + \beta_2 \left[\frac{1 - e^{-\frac{s}{m}}}{s/m} - e^{-\frac{s}{m}} \right]$$

* β_0

- * 水平因子：载荷为1，1是不衰减的常数，对所有期限利率影响一致
- * 长期因子：期限无穷大时利率收敛于 β_0

* β_1

- * 短期因子：其载荷是一个开始于1，并很快衰减至0的函数，对短期利率影响大
- * 斜率因子：当期限趋于0时， $\beta_1 = R_0^0 - \beta_0$ ，因此也可以看作是长短期利率之差（spread）

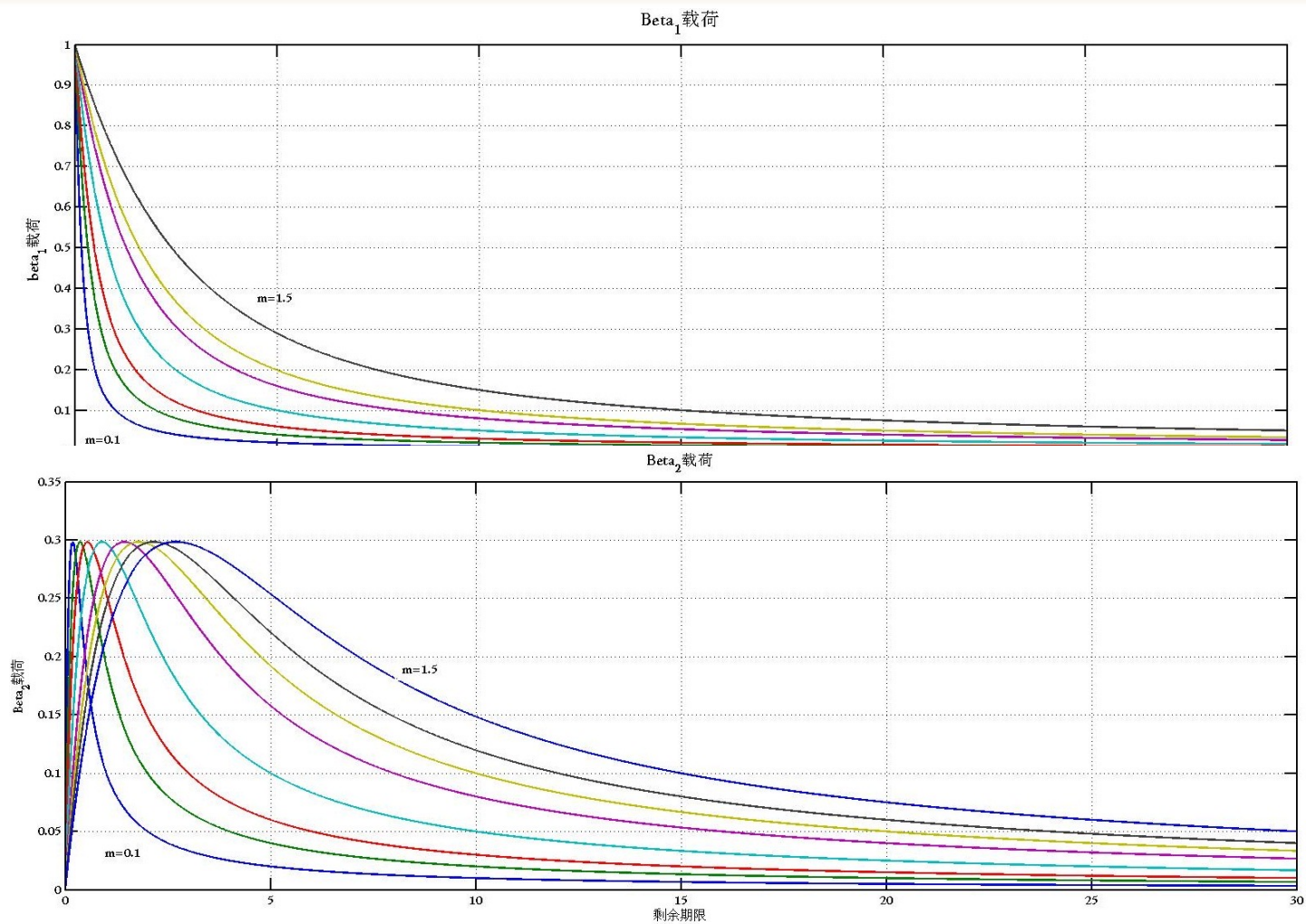
* β_2

- * 其载荷开始于0先增加后衰减为0，对中期利率影响大，主要影响收益率曲线的弯曲度，通常被称为“中期因子”或“曲度因子”

* m

- * 决定了 β_1 和 β_2 的衰减速度。如果 m 较小，收敛的速率比较快，能较好地拟合较长到期期限的曲线。 m 较大时，收敛的速度较慢，能比较好地拟合较短到期期限的收益率曲线。

NS模型参数特征



NS模型的优缺点

- * 其参数富有经济含义，三个参数分别对应着利率期限结构的水平变化、斜率变化以及曲度变化，这与主成份分析的结果之间存在着自然的联系。
- * 短期利率由 β_0 和 β_1 决定，而长期利率只由 β_0 决定，因此在NS模型下，短期利率的波动性一般比长期利率的波动性大，这一点与现实相符的。
- * NS模型的缺陷在于：虽然NS模型可以拟合出上升、下降、水平、先下降后上升的利率曲线，但却无法生成更丰富形状的曲线。

即期利率函数法：NSS模型

* NSS模型：解决NS模型刻画曲线种类受限的问题

* 即期利率函数

$$R_0^s = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\frac{s}{m}}}{s/m} + \beta_2 \left[\frac{1 - e^{-\frac{s}{m_1}}}{s/m_1} - e^{-\frac{s}{m_1}} \right] + \beta_3 \left[\frac{1 - e^{-\frac{s}{m_2}}}{s/m_2} - e^{-\frac{s}{m_2}} \right]$$

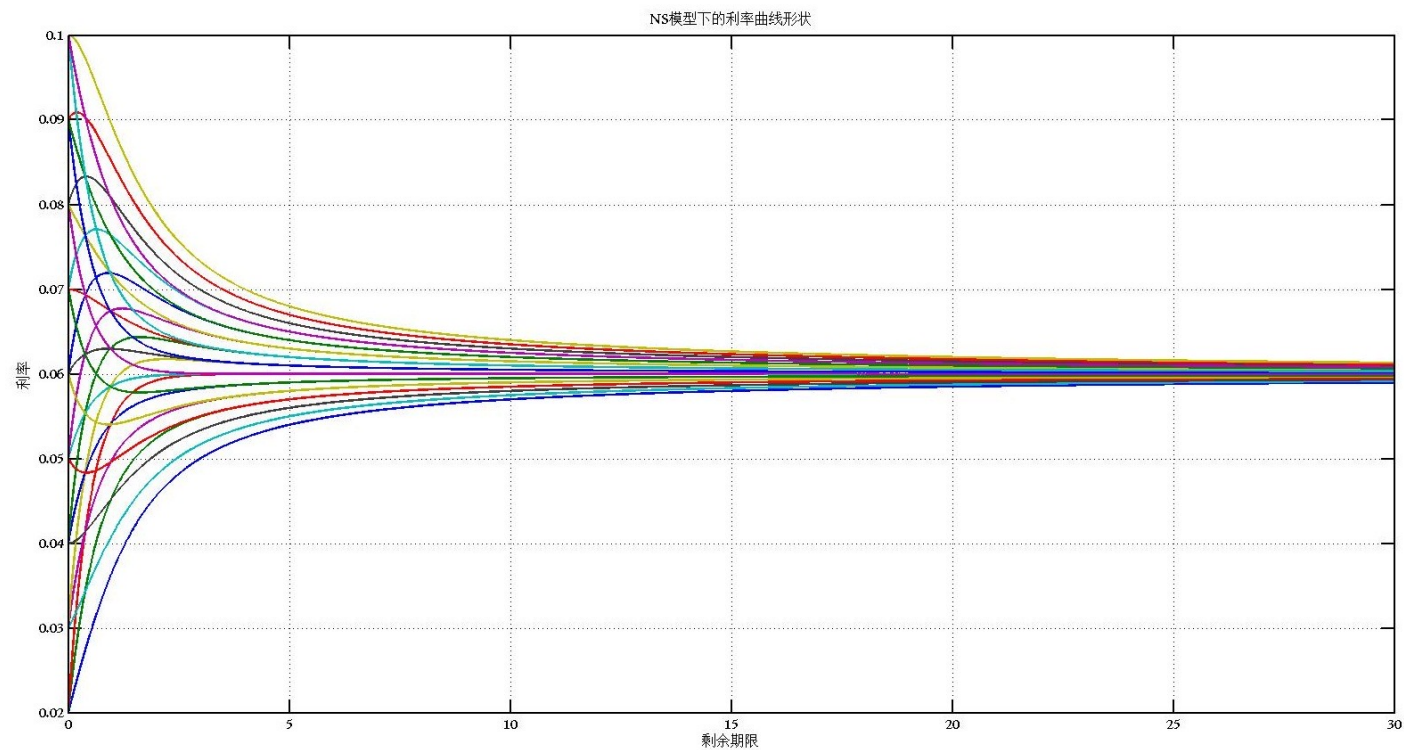
* 改进

* 增加中期项

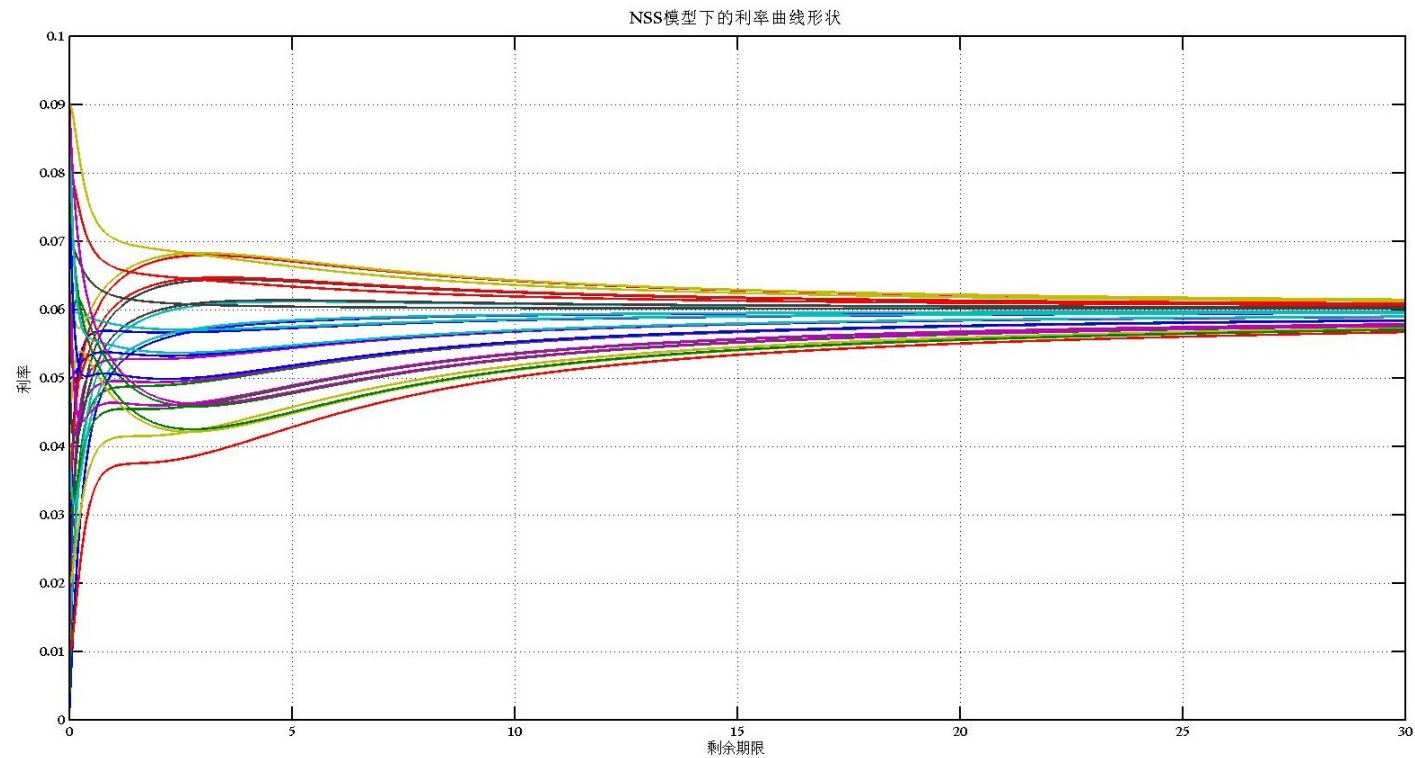
* 增加新的曲度参数 β_3 和调整参数 m_2

* 中短期部分的形状更加灵活多样，从而能够刻画出更丰富形状的利率期限结构。

NS模型下的利率曲线形状



NSS模型下的利率曲线形状



即期利率函数法：参数校准

- * 无法使用最小二乘法，而只能使用非线性最优化技术
- * 同样需要考虑异方差和约束问题
- * 异方差调整通过赋予短期债券较大的权重来体现

$$\hat{\beta} = \underset{\hat{\beta}}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^N \left(\frac{P^j - V^j}{w_j} \right)^2$$
$$w_j = \frac{dP^j}{dy^j}$$

利率期限结构拟合方法评价

- * “散点+插值法”应用方便，但对数据量要求较高，且得到的曲线平滑度可能不是很好
- * “拟合法”能拟合出更为精确和平滑的利率期限结构
 - * 即期利率法的经济含义明确，而且由于用一个函数拟合整条利率期限结构，曲线平滑性也较好
 - * 贴现函数法也有其优越之处。由于用多个连接的分段函数去逼近整条利率期限结构，精确性较高
- * 这些模型本身无法推断出未来的参数变化与今天的参数是如何相关的。这是这些方法被统称为“静态”模型的原因。



厦门大学财务系 陈蓉
aronge@xmu.edu.cn