



# 金融研究

Journal of Financial Research

- 硬信息和软信息框架下银行内部贷款审批权分配和激励机制设计
- 气候变化风险溢价研究
- 政府干预、GDP增长与地方国企过度投资
- 交易者预期异质性、央行干预效力与人民币汇率变动
- 人民币升值真的能够减小美国的失业率么

ISSN 1002-7246



08>

2010 8



## 硬信息和软信息框架下银行内部贷款审批权分配和激励机制设计

- 对中小企业融资问题的启示 ..... 徐 忠 邹传伟 (1)
- 气候变化风险溢价研究 ..... 谢 平 段 兵 (16)
- 政府干预、GDP 增长与地方国企过度投资 ..... 唐雪松 周晓苏 马如静 (33)
- 交易者预期异质性、央行干预效力与人民币汇率变动
- 汇改后人民币汇率的形成机理研究 ..... 李晓峰 陈 华 (49)
- 人民币升值真的能够减小美国的失业率么
- ..... 李自然 成思危 祖 垒 张 锦 汪寿阳 (68)
- 银行卡支付系统的信息成本、兼容使用及交换费
- 基于同一双边市场平台的借记卡与信用卡竞争研究 ..... 牛慕鸿 (81)
- 中国 A 股指数的过度波动 ..... 徐建国 (94)
- 信息竞争性披露、投资者注意力与信息传播效率 ..... 于李胜 王艳艳 (112)
- 隐含波动率曲面:建模与实证 ..... 陈 蓉 吕 恺 (136)
- 独立董事辞职行为的信息含量 ..... 张俊生 曾亚敏 (155)
- 声誉、制度环境与债务融资
- 基于中国民营上市公司的证据 ..... 叶康涛 张 然 徐浩萍 (171)
- 对公司治理内涵的重新认识 ..... 郑志刚 (184)
- 中国构建国际金融中心的路径探讨 ..... 吴晓求 (199)

# 隐含波动率曲面:建模与实证

陈蓉 吕恺

(厦门大学金融系,厦门 361005)

**摘 要:**本文利用香港恒生指数期权的数据,对隐含波动率曲面动态过程进行建模和估计,建立起了一个五因子随机隐含波动率模型。在模型的估计方法上,本文首次引入了基于小样本面板数据的扩展的卡尔曼滤波法。结果显示,在香港市场上,扩展的卡尔曼滤波法比传统的两步法可以得到更好的估计结果,本文建立起来的五因子随机隐含波动率模型能很好地刻画恒指期权隐含波动率曲面的变动规律,效果明显优于静态隐含波动率模型。

**关键词:**隐含波动率曲面;随机隐含波动率;扩展的卡尔曼滤波法

**JEL 分类号:**C23; C51 **文献标识码:**A **文章编号:**1002-7246(2010)08-0136-19

## 一、引言

经典 Black-Scholes (1973) 期权定价模型(以下简称 B-S 模型)假定波动率是常数,然而大量的实证研究发现波动率是随机变量。而波动率是期权类产品定价的关键变量,因此关于波动率的研究成为理论界的一大热点。

在众多研究波动率的模型中,最具代表性的是局部波动率模型(Local Volatility Model)和随机波动率模型(Stochastic Volatility Model)。前者将瞬时波动率视为时间和资产价格的确定性函数;后者则假设瞬时波动率的变动由不同于标的价格变动风险的新风险源驱动,而波动率的风险源与标的价格的风险源之间的相互关系,不同的随机波动率模型给出了不同的假定。然而,这两类模型的共同特征是在估计参数时,都以尽可能地拟合当前的期权价格为目的。由于决定期权价格的其他变量都已知,给定期权价格我们就可以算

收稿日期:2010-03-15

作者简介:陈蓉(1976-),女,金融学博士,美国康奈尔大学博士后,厦门大学经济学院金融系和王亚南经济研究院金融学教授,美国北卡罗来纳大学夏洛特分校访问教授。

吕恺(1985-),男,厦门大学金融系金融工程博士生。

本文感谢自然科学基金项目“非完美信息下基于观点偏差调整的资产定价”(70971114)、教育部“国际金融危机应对研究”应急项目:金融市场的信息功能与金融危机预警(2009JYJR051)和教育部“留学回国人员科研启动基金”(教外司留[2008]890号)的资助。

出相应的隐含波动率。如果我们把不同期限、不同协议价格的期权对应的波动率绘制在由期限、协议价格和波动率构成的三维空间中,我们就可以得到波动率曲面。这样,拟合当前的期权价格,实际上就是拟合当前的隐含波动率曲面。虽然这样校准得到的参数的确可能获得与当前市场看似一致的隐含波动率曲面,但模型参数在时间序列上表现极不稳定,表明这些模型在刻画波动率曲面随时间变动的特征方面表现很糟,需要不断地重复校准估计以追踪隐含波动率曲面的时变特征[如 Dumas 等(1998)和 Cont and Fonseca(2002)等]。也就是说,糟糕的样本外定价能力使得这些模型并未从根本上解决 B-S 模型的不足。Hull and Suo(2002)也指出使用这些模型为路径依赖期权等奇异衍生产品定价时存在很大的模型风险。

针对这一问题,一个可能的解决思路是直接对隐含波动率曲面建模,构建一个能够刻画其影响因素和时变特征的模型,并将其运用到衍生产品定价与风险管理当中去。这种直接构建“隐含波动率模型”的思路与前述传统波动率模型<sup>①</sup>的最大区别在于:隐含波动率在传统波动率模型中是作为模型的输出变量或被解释变量;而在隐含波动率模型中,隐含波动率成了输入变量,是被建模的对象。以隐含波动率作为输入变量,这就首先保证了隐含波动率模型在普通期权市场上的无套利。隐含波动率模型的这一特点决定了其研究具有丰富内涵和重要意义。

首先,在为复杂期权定价时,隐含波动率模型具有信息优势。隐含波动率模型的基本思想是在构建标的资产价格随机过程的同时,波动率模型采用从普通期权市场中提取的隐含波动率曲面模型。由于同时从标的市场和期权市场中获取信息,隐含波动率模型可以更有效地为衍生产品进行定价和风险管理。事实上,Cont and Fonseca(2002)指出,近期越来越多的实证表明发达市场中的期权价格不仅跟标的资产的市场变动有关,而且跟期权市场本身的供求等信息相关。这样,仅仅基于标的资产随机过程改进的模型,由于无法反映期权市场本身的信息,仍然无法很好地刻画期权价格的变动特征。隐含波动率模型正是对这一不足之处的重要改进。

其次,隐含波动率模型的无套利思想提供了一种全新的波动率建模思路。可以看出,传统波动率模型与隐含波动率模型之间的关系与利率市场中传统均衡利率模型与利率市场模型(LMM)之间的关系十分类似。我们知道,利率动态模型始于均衡模型,但自 Heath 等(1992)提出无套利建模思想后,由于可操作性强,以市场利率期限结构为输入变量的市场模型发展迅速,应用十分广泛。然而,波动率模型却似乎一直停留在均衡模型阶段。隐含波动率模型的发展将能够填补市场模型在波动率领域应用中的空白,从而在(奇异)衍生品定价和风险管理方面发挥重要的作用。

尽管如此,要运用隐含波动率模型进行定价和风险管理,其关键之处在于对整个隐含波动率曲面构建动态模型并估计参数。与 HJM 模型仅需对收益率曲线估计动态模型相比,对一个面估计动态模型的难度显然要大得多,该领域的研究才刚刚开始。国外学者分

<sup>①</sup> 关于历史波动率与隐含波动率关系的讨论,详见郑振龙、黄慧舟(2010)。

别提出了确定性和随机性隐含波动率模型的基本框架,并对欧美期权市场进行了一些实证研究,尚未获得非常一致的结论。

在此基础上,本文以香港市场中交易最为活跃的恒生指数期权为研究对象,探索如何构建隐含波动率曲面的动态模型。我们发现一个服从均值回归过程的五因子随机隐含波动率模型可以较好地刻画隐含波动率曲面的随机变动,效果明显优于静态隐含波动率模型。在估计方法上,我们发现国外文献所采用的两步法并不适合于香港市场,本文首次引入的针对小样本面板数据的卡尔曼滤波法可以很大地改善两步法的结果。

本文是国内首篇对隐含波动率曲面动态过程建模进行研究的论文,构造了香港市场隐含波动率曲面的因子模型,并针对香港市场横截面数据不足的情形首次在随机隐含波动率模型的估计中引入了扩展的卡尔曼滤波方法,并取得了明显的效果。这些工作能为奇异衍生产品相应的定价和风险管理提供一个新的发展方向。

后文的主要结构安排如下:第二部分为文献综述,第三部分介绍本文中使用的模型和方法,第四部分为样本与数据,第五部分报告实证建模与估计结果,第六部分进行了稳健性检验,最后是全文的结论。

## 二、文献综述

到目前为止,对隐含波动率曲面建模的研究大体可分为两类:确定性隐含波动率模型与随机隐含波动率模型。

### (一)确定性隐含波动率模型

与传统局部波动率模型类似,确定性隐含波动率模型并不引入新的风险源来描述隐含波动率曲面的变动,而是简单假设隐含波动率的变动与期权的到期期限、行权价或在值程度(moneyness)之间存在确定性关系,并且这种关系不随时间发生变化,因而也被称为静态模型。其中三种常用的确定性变动规则分别为 Derman(1999)提出的粘性行权价规则(Sticky Strike Rule)、粘性 delta 规则(Sticky Delta Rule)和 Daglish 等(2007)提出的平稳时间平方根规则(Stationary Square Root of Time Rule)。

其中,粘性行权价规则认为隐含波动率  $\sigma_t$  是行权价  $K$  和期权剩余期限  $\tau$  的确定性函数,且该关系不随时间  $t$  变化:

$$\sigma_t(K, \tau) = \sigma_{t+\Delta t}(K, \tau) = \varphi(K, \tau) \quad (1)$$

粘性 delta 规则认为隐含波动率是期权在值程度  $m$  和剩余期限  $\tau$  的确定性函数:

$$\sigma_t(m, \tau) = \sigma_{t+\Delta t}(m, \tau) = \varphi(m, \tau) \quad (2)$$

其中  $m = \ln\left(\frac{K}{Se^{(r-q)(T-t)}}\right)$ ,  $S$  为标的资产价格,  $r$  和  $q$  分别为无风险利率和连续红利

率,  $T$  是期权到期时间。可以看出,在粘性 delta 规则下,以  $K$  和  $\tau$  表示的隐含波动率(通常称之为绝对隐含波动率)会随时间变动,而以  $m$  和  $\tau$  表示的隐含波动率(通常称之为相对隐含波动率)是不变的。

平稳时间平方根规则假设隐含波动率是由  $m$  和  $\tau$  的特定函数形式  $\frac{m}{\sqrt{\tau}}$  决定的:

$$\sigma_i(m, \tau) = \sigma_{i+\Delta t}(m, \tau) = \phi\left(\frac{m}{\sqrt{\tau}}\right) \quad (3)$$

由于简单易用,静态模型在实务中应用较多。但它是否正确呢? Dumas 等(1998)用 S&P500 指数期权的周数据对确定性波动率模型进行了检验,发现静态拟合得到的参数结果极不稳定,会随时间发生显著的变化。从理论上说,这一实证结果是符合直觉的,隐含波动率与  $m$ 、 $\tau$  之间的关系应该是会随着时间的变化而变化的,静态模型在这方面的假设显然过于简单了。

## (二) 随机隐含波动率模型

### 1. 随机隐含波动率理论框架

随机隐含波动率模型的基本思想是:从市场观察可知,隐含波动率曲面的动态过程很可能是随机的。然而由于包含了不同期限和不同行权价的波动率,隐含波动率曲面的变动过程是一个极其复杂的多维动态系统,不仅需要对每个波动率的随机过程建模,而且还要考虑各个波动率随机过程之间的相关关系,这在现实中几乎不太可能实现。但人们发现,各个隐含波动率的变动之间是高度相关的,受到某些共同因子的驱动。这样,我们可以去寻找影响隐含波动率曲面上波动率变动的共同因子,并对这些因子的随机过程建模,最终由因子与隐含波动率的关系得到整个隐含波动率曲面的随机过程。这就是所谓的“因子模型”。因子模型最大的好处就在于降维,从而极大地简化了模型。

上述思想可用数学符号表示为

$$\sigma(t, m, \tau) = g[t, m, \tau, y_1(t), \dots, y_p(t)] \quad (4)$$

$$dy_i(t) = \alpha_i(t)dt + \gamma_i(t)dw_i(t) \quad (5)$$

其中  $\sigma(t, m, \tau)$  是以  $m$  和  $\tau$  表示的相对隐含波动率<sup>①</sup>,式(4)中的  $g(\cdot)$  就是  $\sigma(t, m, \tau)$  和  $p$  个因子  $\{y_i\}_{i=1, \dots, p}$  之间在  $t$  时刻的函数关系,式(5)则刻画了因子  $y_i$  在现实测度下的变动过程,其中  $\alpha_i(t)$ 、 $\gamma_i(t)$  分别是  $y_i$  的漂移和波动参数。 $dw_i(t)$  表示标准布朗运动,且满足  $dw_i(t)dw_j(t) = \rho_{ij}dt$ ,  $\rho_{ij}$  为因子间的相关系数。

从式(4)和(5),进一步由伊藤引理可得

$$d\sigma(t, m, \tau) = \eta(t, m, \tau)dt + \sum_{j=1}^p \theta_j(t, m, \tau)dw_j(t) \quad (6)$$

其中,

$$\theta_j(t, m, \tau) = \gamma_j(t) \frac{\partial g}{\partial y_j}, \quad j = 1, \dots, p$$

$$\eta(t, m, \tau) = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^p \alpha_i(t) \frac{\partial g}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \rho_{ij} \gamma_i(t) \gamma_j(t) \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}$$

① 我们也可以构建绝对隐含波动率  $\sigma(t, k, \tau)$  的因子模型,但一般来说相对隐含波动率建模较为方便。



这意味着只要找到合适的因子  $\{y_i\}_{i=1,\dots,p}$ , 建立和估计横截面方程(4)和因子变动方程(5), 就可建立起现实测度下的隐含波动率曲面随机过程(6), 刻画隐含波动率曲面的时变特征。

得到随机隐含波动率曲面的随机过程之后, 如何将其运用于衍生产品定价和风险管理呢? Schonbucher(1999)最早针对单个随机隐含波动率提出了复杂衍生产品定价的基本框架, Ledoit(2002)则将其进行扩展, 针对整个隐含波动率曲面的动态模型提出了定价模型<sup>①</sup>。由于定价需在风险中性测度下进行, 他们在无套利条件下推导发现, 无论是绝对隐含波动率  $\sigma(t, K, \tau)$  还是相对隐含波动率  $\sigma(t, m, \tau)$ , 在风险中性测度下两者的漂移项都完全由其波动项参数(即式(6)中的  $\{\theta_j\}_{j=1,\dots,p}$ )决定。而波动项参数显然是不随测度转换而变化的, 从而可以在现实测度下由因子模型(4)和(5)估计得到。

只要得到风险中性测度下隐含波动率曲面的随机过程, 我们就可以运用

$$dS(t) = (r - q)S(t)dt + S(t)v(t)dw_0^*(t) \quad (7)$$

$$dv(t) = \eta^*(t, 0, 0)dt + \sum_{j=0}^p \theta_j(t, 0, 0)dw_j^*(t) \quad (8)$$

$$d\sigma(t, K, T) = \eta^*(t, K, T)dt + \sum_{j=0}^p \theta_j(t, K, T)dw_j^*(t) \quad (9)$$

为衍生产品定价。

$$P(t) = E_t^*[e^{-r(T-t)}\text{payoff}(T)]$$

其中  $P(t)$  是衍生产品价格,  $*$  表示风险中性测度,  $v(t)$  表示标的资产收益率的瞬时波动率。Ledoit(2002)、Daglish 等(2007)和 Durrleman(2008)均证明, 瞬时波动率  $v(t)$  等于期限趋于零的平价期权的隐含波动率, 从而我们有式(8)<sup>②</sup>。

这样, 如果衍生产品价格只依赖于标的资产价格变化, 如常见的障碍期权、亚式期权等, 在定价时我们只需要用式(8)得到瞬时波动率在风险中性下的过程, 用式(7)和(8)就可为其定价了; 如果衍生产品价格同时依赖于标的资产价格和普通期权价格(或隐含波动率)的变化, 如远期期权、复合期权、选择期权和波动率衍生品等, 我们就需要同时用式(7)、(8)和(9)进行定价。一般情况下, 由于无法得到闭式解, 需要采用数值方法求解。

## 2. 随机隐含波动率实证研究

由上可见, 运用随机隐含波动率为衍生产品定价的关键在于构建模型(6)。而模型(6)的关键又在于寻找风险因子  $\{y_i\}_{i=1,\dots,p}$ , 并建立和估计横截面方程(4)和因子变动方程(5)。因此, 目前对隐含波动率模型进行的实证研究都集中在因子选取和因子模型估计上。

在风险因子的选取方面, 现有的文献主要采用两种方法。第一种方法是利用非参的方法对隐含波动率曲面的变动进行主成分分析, 找出统计意义上的因子, 通过对这些主要因子的变动过程建模达到对整个波动率曲面变动过程的建模目的。其中的代表性论文为

① 由于篇幅所限, 本文仅给出结论, 具体推导过程可参见 Schonbucher(1999)和 Ledoit(2002)。

② 注意, 平价期权的  $m=0$ 。

Cont and Fonseca (2002), 他们用 Karhunen - Loeve 分解技术对 DAX 和 S&P500 指数期权的隐含波动率曲面的动态过程进行了主成分分析, 得到了一个三因子的随机隐含波动率模型。然而, 非参方法的缺点在于对数据的要求比较高, 并且得出的因子只有统计上的意义, 对模型的进一步应用会带来不少限制。第二种方法为参数因子法。该方法首先用一个参数模型来拟合某个时点上的隐含波动率曲面形状, 如果拟合程度足够高, 那么该时刻整个隐含波动率曲面就由这些参数决定, 并且这些参数的变动在很大程度上解释了隐含波动率曲面的时变。因此, 一个自然的做法就是选用这些拟合得到的参数作为隐含波动率曲面的影响因子, 用这些参数的变动刻画波动率曲面的变动。该方法以 Hafner (2005) 和 Goncalves and Guidolin (2006) 为代表。

在参数因子法下, 国外学者均使用两步法进行参数估计, 即先用每天的横截面数据来拟公式(4), 将估计得到的参数作为因子, 再对这些因子进行时间序列建模估计式(5), 从而得到相应的隐含波动率随机模型。参数因子法的优点在于因子往往具有比较明显的经济含义; 但两步估计法中第一步的估计误差很可能导致第二步的结果失真。

此外, Daglish 等 (2007) 用无套利分析方法研究了 S&P500 指数期权隐含波动率曲面的变动, 但他们是在波动率风险溢酬为零的假设条件下, 把风险中性测度下隐含波动率漂移项的限制应用于现实测度中进行了分析。由于波动率风险溢酬为零的假设显然与现实存在很大差异, 因此我们认为该方法的借鉴意义较小。

### (三) 国内相关研究

近几年, 国内学者对隐含波动率曲面也开始了一些研究。张爱玲、吴冲锋 (2007) 提出了基于波动率曲面模型的隐含波动率微分改进算法, 提高了隐含波动率的计算精度。毛娟、王建华 (2009) 则利用 S&P500 指数期权数据对隐含波动率曲面的非参数拟合方法进行了研究。然而, 可以看到, 国内的这些研究都侧重于隐含波动率曲面的构造和估计方法上, 都属于静态角度的研究, 目前尚未有国内文献对隐含波动率曲面的动态过程进行研究。

## 三、模型与方法

在本部分中, 我们将利用上述文献综述和分析的结论, 提出隐含波动率曲面随机模型的建模思路和方法。

隐含波动率曲面随机模型的构建过程, 就是隐含波动率与因子函数关系(4)和因子动态过程(5)的构造和估计过程。其核心环节有三: 一是构造隐含波动率与因子的函数关系; 二是构造因子的动态模型; 三是进行参数估计。

### (一) 构造隐含波动率与因子的函数关系

如前文所述, 要构造隐含波动率与因子的函数关系[即式(4)], 可以采用主成分分析, 直接用统计方法提炼相互独立的因子并建模。但非参方法对数据要求较高, 本文所选的恒指期权数据可能无法满足该类方法的要求, 而且因子只有统计意义。因此本文选择



了参数因子法,希望能够筛选出比较具有经济意义的影响因子。

应该如何选择具体的因子呢?我们认为,如果假定  $g$  的形式不随时间变化<sup>①</sup>,那么对于任何时间  $t$ ,隐含波动率与因子之间的关系都满足函数关系  $g$ ,从而式(4)可以看成是隐含波动率与因子之间横截面的静态模型,而式(5)则是相应因子的动态模型。因此一个自然的做法就是采用前述的确定性变动规则来构造横截面方程(4)。因为这些确定性规则实际上描述了隐含波动率与在值程度、期限等之间在横截面上的静态相关性,具有较强的经济含义。那么在三个确定性规则中,选择哪个较好呢?

从理论上分析,相比隐含波动率与  $K$  之间的关系,隐含波动率与  $m$  之间的关系显然更有道理也更稳定;平稳时间平方根规则由于将剩余期限  $\tau$  作为分母,当剩余期限  $\tau$  趋于零时该规则可能出现問題。因此我们最终选择粘性  $\delta$  规则对应的模型作为横截面参数模型。对式(2)进行泰勒展开就可近似得到

$$\ln\sigma(m, \tau) = \beta_1 + \beta_2 m + \beta_3 m^2 + \beta_4 \tau + \beta_5 m\tau + \beta_6 \tau^2 + \varepsilon \quad (10)$$

可以看出,模型(10)的确具有比较强的经济含义: $\beta_1$  表示对数隐含波动率的水平值; $\beta_2$  是隐含波动率关于  $m$  的斜率; $\beta_3$  度量了隐含波动率关于  $m$  的曲度; $\beta_4$  表示隐含波动率关于期限的斜率; $\beta_5$  刻画了  $m$  和期限的相互影响关系,期限不同,波动率关于  $m$  的偏斜程度也可能不同; $\beta_6$  则是波动率曲面关于期限的曲度的参数。

在某个固定时点上,参数  $\beta_1$  到  $\beta_6$  是确定的,不同的  $m$  和  $\tau$  决定了该时点的隐含波动率曲面;然而,在时间序列上  $m$  和  $\tau$  是确定的量,真正决定每天隐含波动率曲面的不同形状的是参数  $\beta_1$  到  $\beta_6$ ;每天发生变动的从而导致隐含波动率曲面发生动态变化的,也是参数  $\beta_1$  到  $\beta_6$  而非  $m$  和  $\tau$ 。因此参数  $\beta_1$  到  $\beta_6$  就是式(10)中影响隐含波动率曲面的参数因子。

式(10)给出了横截面参数模型的一般形式。但对特定市场来说,并非等式右边的所有项都是必要的。因此我们分别设其中一些参数为零,从而引进式(10)的一系列嵌套模型,如  $\ln\sigma(m, \tau) = \beta_1 + \beta_2 m + \beta_3 m^2 + \varepsilon$  和  $\ln\sigma(m, \tau) = \beta_1 + \beta_2 m + \beta_3 m^2 + \beta_4 \tau + \beta_5 m\tau + \varepsilon$  等。参数越多,模型的样本内解释力度自然越强;但模型的复杂程度也越大,相应地过度参数化的风险也更大,因此需要根据实际数据对嵌套模型进行筛选。

具体筛选方法是:对每个交易日的数据单独回归估计参数,再用当天回归的结果对下一天的数据进行样本外预测,一直滚动检验直至样本期末,最后对所有样本外预测的结果进行汇总分析。综合考察不同模型在样本内的调整  $R^2$ 、样本内 RMSE、样本内 RRMSE、SIC 值以及样本外预测 RMSE 和样本外 RRSME,从而筛选出最优的横截面模型。

## (二) 构造因子的动态模型

在选定具体的横截面回归模型之后,我们可以对每天的期权数据进行横截面回归得到每天各参数的估计值,观察这些因子估计值的时间序列特征,就可以相应构造出因子的

① 关于  $g$  函数形式不变性的假定,有一定的合理性,因为根据泰勒展开,我们都可以近似考虑变量之间线性或二次关系,从而可以假设  $g$  是线性或二次形式。

动态模型(5),具体模型设定视数据结果而定。

### (三)参数估计

要估计方程系统(4)和(5)的参数,一个最容易想到的方法就是首先对每天的横截面数据回归,然后用回归得到的因子估计值的时间序列作为数据输入,再估计动态过程的参数,这就是两步估计法。两步法最大的好处在于其简便性,它把横截面估计和时间序列估计分开进行,较容易实现,国外学者均使用此种方法。

然而,两步估计法的局限在于:第二步使用的输入数据是第一步估计得到的因子估计值,测量误差可能导致第二步估计结果的有偏、不一致以及显著性检验的失效。对于成熟有效的市场,如果横截面数据足够多,并且第一步回归的拟合程度足够好,这种方法误差就相对较小。对于横截面样本数据较少的市场,这一缺陷就难以回避。

我们在处理数据中就发现香港市场很多交易日的横截面数据都较少。为了克服这个问题,本文首次采用了基于小样本面板数据下扩展的卡尔曼滤波法对方程系统(4)和(5)进行估计<sup>①</sup>,该方法同时估计横截面和时间序列模型,联合了当前和过去所有的信息,因此是一种更为有效的估计方法。由于具体的卡尔曼滤波度量方程和转移方程需要根据具体模型写出,这部分内容将在第五部分中详细介绍。

## 四、样本与数据

本文选用香港恒生指数期权作为实证分析的对象。该期权是目前香港市场交易最为活跃流动性最好的期权产品之一,比较适于本文隐含波动率曲面因子模型的实证研究。恒生指数期权属于欧式期权,期权费以完整整数点报价,最小变动单位是1点,而每点的合约乘数为港元50.00,合约到期日为每月的倒数第二个交易日。

本文采用的数据样本期为2005年1月3日至2007年12月31日,共739个交易日的恒指期权的收盘价,由于从市场中直接得到的数据中夹杂着各种噪音成分,会对建模过程产生较大的影响,因此我们对原始数据进行了以下处理:

第一,剔除所有价内期权的数据,即对于看涨期权,剔除所有 $m > 0$ 数据,对于看跌期权,剔除所有 $m < 0$ 数据。也就是说,本文仅对价外期权和平价期权建模。主要原因有三:首先,从理论上说,根据期权平价公式,对于具有相同行权价的看涨和看跌期权,它们的隐含波动率应该相等,并且两者必有一个处于价内而另一个处于价外(或两者都处于平价),使用其中之一就能获得整个隐含波动率曲面。但这并非最重要的原因,毕竟在现实市场中,噪音的存在往往使得期权平价公式不能成立。其次剔除价内期权数据的更根本原因在于,波动率对期权价值的影响主要体现在期权的时间价值上,对于价内期权,尤其是深度价内期权,其价格主要由内在价值决定,时间价值相对内在价值来说非常小,微小的市场摩擦就能把时间价值覆盖,从而使得隐含波动率对市场摩擦极度敏感,容易造成

<sup>①</sup> 该方法最早由 Cortazar 等(2004)提出,用于小样本的利率期限结构建模与估计。

较大误差。最后,市场参与者购买期权一般用于投机或保值,对于价外或平价期权的需求远大于价内期权,从数据中也可以发现,价外期权的交易明显比价内期权更为活跃。基于上述原因,本文剔除了价内期权的数据。

第二,由于恒指期权最小变动单位为 1 个指数点,为消除价格不连续的影响,剔除所有交易价格为 1 个指数点的数据。

第三,由于期限过短或过长的期权都存在较大的流动性问题,造成价格的噪音,因此剔除所有距到期小于 7 个日历日及大于 1 年的数据。

第四,由于过少的交易量难以反映真实的价格,因此剔除所有日交易合约数少于 20 的数据。

第五,利用看涨和看跌期权价格上下限条件的限制,剔除明显不合理的数据。

这样,经过以上筛选,得到的数据总量为 29170,其中看涨期权 10558 个,看跌期权 18612 个,每个交易日横截面数据最大数为 97,最小数为 5,平均数为 39。本文采用恒生指数日收盘价作为标的价格,选用港元存款市场利率作为无风险利率,采用香港市场平均股息率代替红利率,对以上数据应用 BS 公式计算就得到对应的隐含波动率。

为了初步了解恒生指数隐含波动率的性质,本文对所选数据按照  $m' = \frac{K}{Se^{(r-q) \times T-t}}$  ①

和  $\tau$  进行分组分析,如表 1 所示。

根据表 1,从期限上看,短期交易占总交易 69.4%,而中期和长期期权分别只占了 26.5% 及 4.1%,说明香港市场更倾向于交易短期期权;从在值程度上看,较多的数据分布在  $m' \leq 0.97$  和  $0.97 \leq m' \leq 1.03$  的区域内,两者分别占比 47.2% 和 30.3%,由于本文剔除了价内期权,因此  $m' \leq 0.97$  均表示看跌期权数据,而  $m' \geq 1.03$  均为看涨期权,这说明较多的数据集集中于价外看跌期权及平价期权。

观察表 1 各列,可以发现,无论是短期、中期、长期还是总数据,平均隐含波动率均随  $m'$  的增加而减小,这说明市场中各期限的隐含波动率都存在明显的波动率偏斜现象;观察表 1 各行,可以发现,对于  $m' \leq 0.97$  的情形和总数据,平均隐含波动率随期限的增加而减小,表现为隐含波动率递减的期限结构,但在其他两行中,平均隐含波动率受期限影响不是很明显,并且从整体上来看,期限对波动率的影响似乎小于在值程度的影响。

从以上初步分析可见,恒生指数期权的隐含波动率确实受对应期权的在值程度和期限  $\tau$  的影响,并且呈现出一定的规律性,主要表现为波动率偏斜及递减的期限结构,这也为本文后面的模型构造提供了一定的依据。

① 这里之所以引入  $m'$ ,是为了在分组分析时更为直观,在文章其他部分使用的在值程度指标为  $m = \ln(m')$ 。



表 1 样本数据基本分组分析

		$\tau \leq 60$	$60 < \tau < 180$	$\tau \geq 180$	Total
$m' \leq 0.97$	数量(%)	9892(33.9%)	3445(11.8%)	446(1.5%)	13783(47.2%)
	平均IV	0.278	0.244	0.214	0.268
$0.97 < m' < 1.03$	数量(%)	5963(20.4%)	2496(8.6%)	379(1.3%)	8838(30.3%)
	平均IV	0.187	0.187	0.171	0.186
$m' \geq 1.03$	数量(%)	4405(15.1%)	1784(6.1%)	360(1.2%)	6549(22.5%)
	平均IV	0.165	0.169	0.154	0.166
Total	数量(%)	20260(69.4%)	7725(26.5%)	1185(4.1%)	29170(100%)
	平均IV	0.227	0.208	0.182	0.220

注:IV表示隐含波动率。

五、实证建模与估计结果

(一)构建横截面参数模型

为了构建合理的横截面参数模型,我们基于式(10)构造了以下 5 个嵌套模型:

模型 1:  $\ln\sigma(m,\tau) = \beta_1 + \beta_2m + \beta_3m^2 + \varepsilon$

模型 2:  $\ln\sigma(m,\tau) = \beta_1 + \beta_2m + \beta_3m^2 + \beta_4\tau + \varepsilon$

模型 3:  $\ln\sigma(m,\tau) = \beta_1 + \beta_2m + \beta_3m^2 + \beta_4\tau + \beta_5m\tau + \varepsilon$

模型 4:  $\ln\sigma(m,\tau) = \beta_1 + \beta_2m + \beta_3m^2 + \beta_4\tau + \beta_5\tau^2 + \varepsilon$

模型 5:  $\ln\sigma(m,\tau) = \beta_1 + \beta_2m + \beta_3m^2 + \beta_4\tau + \beta_5m\tau + \beta_6\tau^2 + \varepsilon$

之后,我们以滚动短期检验的样本内拟合、SIC 准则和样本外预测效果来筛选最终的模型,具体结果参见表 2。

表 2 横截面参数模型效果比较

	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5
Adj R2	0.7746	0.8322	0.8569	0.8445	0.8691
RMSE	0.0652	0.0554	0.0491	0.0519	0.0455
RRMSE	4.30%	3.42%	2.95%	3.13%	2.67%
SIC	21.06%	9.38%	29.48%	9.51%	30.57%
样本外 RMSE	0.0898	0.0854	0.0859	0.0912	0.0937
样本外 RRMSE	6.33%	5.83%	5.84%	6.14%	6.24%

对于样本内拟合效果<sup>①</sup>,观察平均的调整 R<sup>2</sup> 及样本内 RMSE 和 RRMSE 可以发现,随着因子数的增加,模型样本内拟合效果递增,模型 1 的样本内拟合效果最差,模型 5 最优,

<sup>①</sup> 2006 年 12 月 5 日的横截面回归结果显示调整 R<sup>2</sup> 为负,说明这一天数据是奇异值,因此我们剔除了这一天的数据。

模型 3 次之。然而,嵌套模型的选择不能仅从样本内拟合效果来判断。随着因子数的增加,虽然模型样本内的拟合效果递增,模型复杂程度以及模型的过度拟合化风险也随之递增。

因此,我们进一步用 SIC 准则及样本外预测误差来检验模型的过度拟合程度。最小的 SIC 值代表了样本内表现为最优的模型,表 2 中的 SIC 行记录了用 SIC 准则判断对应模型为最优模型的天数占总样本天数的百分比。可以发现,在 SIC 准则下,模型 3 和模型 5 的表现明显优于其余模型。

最后观察模型的样本外表现,容易看出,虽然模型 5 在样本内拟合是最优的,然而其在样本外的预测能力则大大减弱,因此可以判断模型 5 存在较严重的过度参数化问题,而模型 3 的样本外表现相对较好。过少的因子会导致拟合效果的不足,而过多的因子会加大模型的过度拟合化程度导致样本外预测效果的不足,综合考虑模型的样本内拟合和样本外预测能力,容易看出模型 3 为最优模型,因此,本文最终选取了模型 3 作为隐含波动率的参数拟合模型,其平均调整  $R^2$  为 85.69%,说明该模型在横截面上的拟合已经达到了较好的效果。

## (二) 构建参数因子的动态模型

### 1. 参数因子时间序列基本特征

要构建参数因子的动态模型,首先需要观察这些因子的时间序列特征。在样本内的每天对模型 3 进行横截面回归,就可得到参数因子  $\beta_1$  至  $\beta_5$  估计值的时间序列,如图 1 所示。

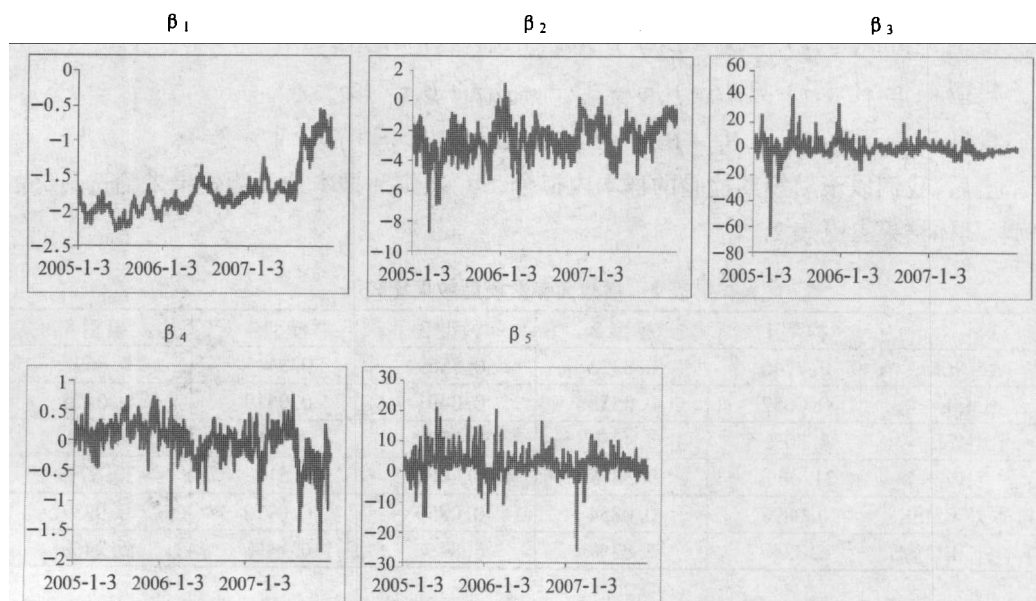


图 1 模型 3 参数因子时间序列图

观察  $\beta_1$  序列的变动图,  $\beta_1$  变动范围从最小的 -2.281 到最大的 -0.543,简单转换可以得到隐含波动率水平的变动范围为 10.22% 到 58.10%,均值为 17.87%,符合我们对市

场的直观观察。同时,2007 年下半年之后,波动率水平明显高于样本期内其他时间,这显然是次贷危机的影响结果。

观察  $\beta_2$  序列图,可以发现绝大部分的  $\beta_2$  都为负值,只有极少数情况下出现正的  $\beta_2$  值。说明隐含波动率曲面关于在值程度在大多数情况下都有负的斜率,这与前面的初步数据统计特征是一致的。

$\beta_3$  是表现最不稳定的一个因子,其值从最小 -66.179 到最大的 42.169,并且标准差也达到了 6.62,说明隐含波动率曲面关于在值程度的曲度变化极大,并且凹凸不定。

$\beta_4$  是隐含波动率曲面关于期限的斜率,其符号也不确定。但平均来说,这是一个负值,表明隐含波动率关于期限是递减的,与表 1 的数据统计结果也较一致。

$\beta_5$  的大部分值都为正,并且其均值也为 2.692,表明大多数情况下,对于短期期权,波动率关于在值程度偏斜比长期期权更明显,这一特点也与表 1 的数据统计结论是一致的。

总的来看,上述参数因子的确是时变的,这进一步说明假定隐含波动率与  $m$ 、 $\tau$  等的关系是确定不变的静态模型的确是不合理的,应采用随机模型刻画隐含波动率的动态变化。

2. 参数因子时间序列建模

我们首先用带常数和确定性时间趋势的 ADF 方法检验了上述各因子估计值的平稳性,发现除了  $\beta_1$  在 5% 的水平上拒绝单位根假设外,其他 4 个因子都能以 1% 的水平显著拒绝单位根假设,表明各风险因子基本上都是平稳序列,因而可以直接对它们建模<sup>①</sup>。

其次我们对各因子的估计值进行自相关分析,总的来看,AR(1)模型是描述所有因子自回归特征的最佳模型。相应地我们运用与离散 AR(1)模型对应的均值回复 OU 过程来描述每个因子的连续随机过程,如式(11)所示。

最后我们对各因子之间的同期相关性进行了分析,发现不少因子之间存在着较强的相关关系,如表 3 所示。在构建各因子时间序列模型时,如果我们用 VAR 模型来捕捉各因子之间的相关性,我们很难找到一个简单的对应于 VAR 模型的连续时间过程;因此我们假设各因子变动的相关关系体现在各自一阶自回归的干扰项,也就是连续时间下的标准布朗运动之间具有相关性。

表 3 因子相关系数矩阵

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$
$\beta_1$	1.0000	0.3811	-0.1932	-0.7423	-0.0943
$\beta_2$	0.3811	1.000	0.4966	-0.2195	-0.6060
$\beta_3$	-0.1932	0.4966	1.0000	0.1610	-0.1188
$\beta_4$	-0.7423	-0.2195	0.1610	1.0000	0.0975
$\beta_5$	-0.0943	-0.6060	-0.1188	0.0975	1.0000

① 受篇幅所限,文中不报告平稳性检验和自相关检验的结果,需要者可与作者联系。



### (三) 恒生指数期权隐含波动率曲面模型设定

总之,对恒生指数期权样本期内的研究表明,五因子参数模型可以较好地拟合每天的隐含波动率曲面,而这些因子的时间序列都可以用一个 AR(1) 过程表示,各因子变动之间的相关关系则反映在它们各自一阶自回归方程的干扰项中。这样,恒生指数期权整个隐含波动率曲面的变动可由如下方程系统描述:

$$\begin{cases} \ln \sigma_i(m, \tau) = \beta_1(t) + \beta_2(t)m + \beta_3(t)m^2 + \beta_4(t)\tau + \beta_5(t)m\tau + \varepsilon \\ d\beta_i(t) = \kappa_i(\theta_i - \beta_i(t))dt + \gamma_i dw_i(t) \\ dw_i(t)dw_j(t) = \rho_{ij}dt \quad i, j = 1, \dots, 5 \end{cases} \quad (11)$$

其中  $\kappa_i$  表示第  $i$  个因子的均值回复速度,  $\theta_i$  表示第  $i$  个因子的长期均值,  $\gamma_i$  表示第  $i$  个因子的波动项,这里假设它们都为常数,  $dw_i(t)$  则表示反映第  $i$  个因子随机变动的标准布朗运动,而  $\rho_{ij}$  表示两个布朗运动  $dw_i(t)$  和  $dw_j(t)$  之间的相关系数。

### (四) 参数估计

在完成模型设定之后,我们估计了方程系统(11)的参数。如第二部分中所说,两步估计法相对简单,但香港市场在很多时候横截面数据都较少,例如在 2006 年 12 月 27 日,处理后的可用数据仅有 5 个,而我们的具体拟合方程中参数个数也为 5 个,可以得到很好的拟合结果,其  $R^2$  达到了 0.995,但参数的估计值显然不可靠,从而导致估计结果的不可靠。

为了克服这个问题,本文引入了基于小样本面板数据下扩展的卡尔曼滤波法。

#### 1. 五因子随机隐含波动率模型的卡尔曼滤波状态空间表示

##### (1) 度量方程

在五因子随机隐含波动率模型(11)中,度量方程即为各个隐含波动率关于  $m$  和  $\tau$  展开的方程,即  $t_i$  时刻的卡尔曼滤波度量方程可表示为:

$$\begin{bmatrix} \ln \sigma_{t_i}(m_1, \tau_1) \\ \vdots \\ \ln \sigma_{t_i}(m_{q_i}, \tau_{q_i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m_1 & m_1^2 & \tau_1 & m_1 \tau_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & m_{q_i} & m_{q_i}^2 & \tau_{q_i} & m_{q_i} \tau_{q_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t_i) \\ \beta_2(t_i) \\ \beta_3(t_i) \\ \beta_4(t_i) \\ \beta_5(t_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1(t_i) \\ \vdots \\ \varepsilon_{q_i}(t_i) \end{bmatrix} \quad (12)$$

矩阵表示形式为:

$$z_t = H_t x_t + \varepsilon_t \quad (13)$$

其中  $q_t$  表示第  $t$  天横截面数据的样本量。同时假设各度量方程的误差项之间满足独立同分布,具有相同的方差  $\delta$ ,则度量误差  $\varepsilon_t$  的方差协方差矩阵为:

$$R_t = \begin{bmatrix} \delta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta \end{bmatrix}_{q_t \times q_t}$$

## (2) 转移方程

五因子随机隐含波动率模型的转移方程由反映因子变动的五维均值回复过程给出, 由于对随机变动方程  $d\beta_i(t) = \kappa_i(\theta_i - \beta_i(t))dt + \gamma_i dw_i(t)$  进行离散化处理, 可得:

$$\beta_i(t_j) | F_{t_{j-1}} \sim N(Q_i(1 - e^{-\kappa_i \Delta t}) + \beta_i(t_{j-1})e^{-\kappa_i \Delta t}, r_i^2(1 - e^{-2\kappa_i \Delta t})/2\kappa_i)$$

因此, 对五个因子变动方程离散化, 可得卡尔曼滤波转移方程为:

$$\begin{bmatrix} \beta_1(t_i) \\ \vdots \\ \beta_5(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(1 - e^{-\kappa_1 \Delta t}) \\ \vdots \\ \theta_5(1 - e^{-\kappa_5 \Delta t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-\kappa_1 \Delta t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-\kappa_5 \Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t_{i-1}) \\ \vdots \\ \beta_5(t_{i-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1(t_i) \\ \vdots \\ \xi_5(t_i) \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi(t_i) | F_{t_{i-1}} &\sim N(0, Q), \\ Q &= \left[ \frac{\gamma_i \gamma_j \rho_{ij}}{\kappa_i + \kappa_j} (1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j) \Delta t}) \right]_{i,j=1, \dots, 5} \end{aligned}$$

用向量表示即为:

$$x(t_i) = c + Ax(t_{i-1}) + \xi(t_i) \quad (15)$$

这样, 我们就给出了五因子随机隐含波动率模型下的卡尔曼滤波状态空间表示, 然后采用极大似然法进行估计。整个模型待估计的参数共有 26 个, 分别为:

$$\begin{aligned} \psi = \{ &\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \dots, \\ &\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{15}, \rho_{23}, \rho_{24}, \rho_{25}, \rho_{35}, \rho_{35}, \rho_{45}, \delta \} \end{aligned}$$

可以看到, 扩展的卡尔曼滤波法允许不同时间点上的横截面样本数据  $q_t$  不同, 从而当存在部分时间点上横截面样本数  $q_t$  较小时, 相对于两步法只利用当天数据进行拟合, 卡尔曼滤波法由于是联合当前和过去所有信息下的最优估计, 因此部分横截面样本数据的缺失对估计结果影响较为有限。

## 2. 模型估计结果

应用 matlab 软件下的约束条件非线性函数最优化算法, 把所有横截面及时间序列数据同时代入, 在约束条件下最大化似然函数值。经过反复调试运算, 最终得到对数似然函数值为 65288, 26 个参数估计结果和相应的标准误如表 4 所示。

由表 4 可以看出, 除了几个接近零的相关系数外, 卡尔曼方法估计得到的参数结果大部分都比较显著。其中,  $\kappa_i$  表示第  $i$  个因子的均值回复速度, 结果显示第一个因子均值回复速度相对最小, 其他几个因子回复速度都较大,  $\kappa_i$  越小表明该因子受滞后项的影响越明显;  $\theta_i$  表示了第  $i$  个因子的长期均值水平, 可以看到, 前四个因子的均值水平都为负值, 只有第五个因子均值水平为正, 而各因子的均值水平也反映了各个因子与对数隐含波动率在平均意义上的关系;  $\gamma_i$  表示了第  $i$  个因子的波动, 这里的结果与前面因子时间序列统计特性中得到的结果较为一致, 反映隐含波动率曲面水平变动的第一个因子的波动最小, 而反映曲面曲率变动的第三个因子的波动最大; 在相关系数  $\rho_{ij}$  中, 有一部分系数值较接近零, 并且不显著, 表明这些因子间相关关系较弱, 而对于其他一些因子, 如因子 1 和因子 4、因

子 2 和因子 5 之间则体现了很强的负相关性。

表 4 参数估计结果

参数	估计值	标准误	参数	估计值	标准误
$\kappa_1$	5.7349	1.0437	$\gamma_4$	1.8402	0.0896
$\kappa_2$	24.2365	3.1373	$\gamma_5$	17.9455	1.1306
$\kappa_3$	25.3493	3.9338	$\rho_{12}$	0.0424	0.0648
$\kappa_4$	19.3479	3.1157	$\rho_{13}$	-0.0801	0.0385
$\kappa_5$	31.8092	5.3463	$\rho_{14}$	-0.8927	0.0126
$\theta_1$	-1.6854	0.0850	$\rho_{15}$	0.0298	0.1122
$\theta_2$	-2.5145	0.1896	$\rho_{23}$	0.7959	0.0303
$\theta_3$	-0.6311	0.4958	$\rho_{24}$	-0.0600	0.0813
$\theta_4$	-0.0212	0.0526	$\rho_{25}$	-0.8391	0.0242
$\theta_5$	2.4114	0.3262	$\rho_{34}$	0.0015	0.0344
$\gamma_1$	0.8995	0.0282	$\rho_{35}$	-0.5781	0.0580
$\gamma_2$	8.0464	0.3381	$\rho_{45}$	0.0048	0.1472
$\gamma_3$	21.6992	1.4878	$\delta$	0.0035	0.0000

(五)模型比较和分析

尽管估计出了参数,但参数估计并非本文的主要目的。我们的主要任务是对不同模型和不同方法进行比较,探索适合于恒生指数期权隐含波动率曲面建模的模型与方法。

我们首先对两步法和卡尔曼滤波法进行了比较。我们将 3 年样本数据中的 2005 年 1 月 3 日至 2006 年 12 月 29 日两年划分为样本内,2007 年数据作为样本外,分别运用两步法和卡尔曼滤波法,用样本内数据估计得到模型参数,然后假设参数保持不变,对 2007 年的每个交易日进行一步预测,最终通过比较平均的样本外预测误差来考察哪个方法效果较好。

其次我们也对静态模型(以粘性 delta 规则为代表)的样本外预测效果进行了估计。为了具有可比性,我们也用 2007 年数据进行了短期滚动检验。即每天估计参数,并用当天的参数估计值作为第二个交易日参数值的预测,滚动下去直至年末,最后计算平均的样本外预测误差。

,表 5 给出了模型比较的结果。可以看到,对于扩展卡尔曼滤波方法下得到的随机动态模型,样本外的表现与样本内十分接近,并且都达到一个 5% 左右的较小的误差水平,说明模型效果较好,而且结果稳定可靠。对于两步法得到的随机动态模型,无论在样本内还是在样本外的指标都劣于卡尔曼方法,尤其是样本外预测效果上的劣势更为明显,这充分说明了两步法估计的巨大误差。静态模型获得了最好的样本内拟合结果。这并不奇



怪,因为我们对静态模型进行了每天的重复估计,其使用的参数数量远远大于随机模型。在这种情况下,样本内的结果并不能作为模型比较的标准。而从表 5 样本外预测效果来看,即使进行了每天重复估计,牺牲了模型参数的稳定性,静态模型的样本外表现依然明显劣于卡尔曼滤波法下的随机模型,说明在预测能力上静态模型远不如随机模型。

综合上述比较分析,我们可以得出结论:在随机模型的估计方法上,扩展的卡尔曼滤波方法明显优于两步估计法;在刻画隐含波动率曲面随时间变动规律上,随机模型明显优于静态模型。

表 5 模型结果比较

	随机模型		静态模型
	卡尔曼滤波方法	两步估计法	
样本内 RMSE	0.0756	0.0837	0.0409
样本内 RRMSE	5.050%	5.645%	3.20%
样本外 RMSE	0.0763	0.0917	0.0825
样本外 RRMSE	5.089%	8.769%	7.51%

六、稳健性检验

在本部分中,我们将对前文的模型结论进行稳健性检验。第一,在前面嵌套模型选取时,我们用了单独一天的数据作为样本进行拟合,然后用这个结果来预测第二天的数据,得到我们的结论。然而,上述结论的得到有否可能是由于样本内拟合时包含的信息量不足导致拟合结果的不准确而造成预测误差?如果我们用更多的横截面数据作为样本内数据进行拟合,原结论是否还成立?第二,对于前面所有模型,我们都是在整个样本中进行考察的,然而是否有可能某些结论只在该特定样本下成立,在其他子样本中就不成立呢?针对这两个问题,我们分别进行了稳健性检验。

(一)稳健性检验 1:横截面模型筛选中增加样本内拟合数据

在前文因子模型的横截面模型筛选中,我们是运用每天估计得到参数的样本外检验效果来筛选模型。这样,在某一天样本数过少的情况下,过度参数化问题严重,样本内估计出来的参数就不可靠。那么第二天进行预测时,预测误差大的原因可能就在于本身参数估计的不准确,而不是模型的不准确。为了考察这一问题是否影响结论,我们采用两个连续交易日的数据作为样本进行拟合,这样用于参数估计的信息就大大增加,从而参数估计结果的准确性也增加。然后,我们再用得到的参数估计值对第三个交易日的数据进行样本外检验。

横截面模型筛选的结果由表 6 给出。可以看出,用连续两个交易日的数据作为样本的情况下,模型 3 的优势更为明显,其被 SIC 准则选中的比例大大超过其他模型,并且样

本内样本外的综合表现能力较其他模型都有较大优势,因此原结论仍然成立。

表 6 稳健性检验 1 的模型比较结果

	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5
Adj R <sup>2</sup>	0.7522	0.8042	0.8287	0.8150	0.8389
RMSE	0.0720	0.0637	0.0581	0.0611	0.0556
RRMSE	4.88%	4.11%	3.69%	3.88%	3.48%
SIC	17.53%	9.10%	36.68%	7.20%	29.48%
样本外 RMSE	0.0877	0.0822	0.0790	0.0839	0.0814
样本外 RRMSE	6.07%	5.51%	5.25%	5.57%	5.34%

(二)稳健性检验 2:不同子样本的检验

由于前文中比较的结果都是在全样本中得到,为了排除特殊样本期的影响,我们对各个子样本的结果进行了检验。我们分别用 2005 年数据作为样本内估计,2006 年作为样本外预测,以及 2006 年作为样本内估计,2007 年作为样本外预测,子样本下得到的比较结果如表 7 所示。可以看到,在两个子样本下,模型的结果均保持不变,因此可以排除特殊样本期对结果的影响。

表 7 子样本模型结果的比较

	子样本 1			子样本 2		
	随机模型		静态模型	随机模型		静态模型
	卡尔曼 滤波方法	两步估计法		卡尔曼 滤波方法	两步估计法	
RMSE	0.0702	0.0730	0.0526	0.0756	0.0837	0.0409
RRMSE	4.03%	4.19%	2.91%	5.05%	5.65%	3.20%
样本外 RMSE	0.0704	0.0837	0.0814	0.0781	0.0714	0.0825
样本外 RRMSE	4.06%	8.33%	4.84%	5.12%	6.79%	7.51%

七、结 论

隐含波动率模型是一类基于市场的波动率模型,由于包含了更多的市场信息从而比传统的波动率模型更为有效,因此也要求有更好的市场条件作为应用的基础,其运用的关键在于根据特定市场的状况建立起合适的隐含波动率曲面模型。本文采用参数因子法对隐含波动率曲面的随机过程进行了实证建模和检验。我们发现,卡尔曼滤波法下,一个服从均值回归过程的五因子随机隐含波动率模型具有较好的样本内和样本外表现,可以较

好地刻画恒生指数期权隐含波动率曲面的变动。

在模型估计上,本文最大的创新之处在于改进了国外学者使用的两步估计法,在横截面样本数据较少的情况下引入了扩展的卡尔曼滤波法。我们发现无论在参数的稳定性、样本内拟合效果还是在样本外预测效果上,卡尔曼滤波法都要明显地优于两步估计法。并且,卡尔曼滤波法得到的随机动态模型在刻画隐含波动率曲面随时间变动规律上明显优于确定性的静态模型,这说明引入随机动态模型可以更好地刻画隐含波动率曲面的变动。这些工作为运用隐含波动率模型为奇异期权定价奠定了重要的基础。值得一提的是,由于本文所使用的基准隐含波动率来源于B-S方法,这就有可能使得本文的模型结果受到模型风险的影响<sup>①</sup>。在数据条件允许的情况下,后续的研究中可以考虑引入其他的隐含波动率计算方法进行对比,甚至是无模型隐含波动率,以考察模型风险是否将对本文的核心结论产生影响。

## 参考文献

- [1] 毛娟、王建华,2009:《隐含波动率曲面的非参数拟合》,《武汉理工大学学报》,第2期,第197~199页。
- [2] 张爱玲、吴冲锋,2007:《隐含波动率微分算法的改进——波动率表明研究》,《上海交通大学学报》,第12期,第1985~1989页。
- [3] 郑振龙、黄慧舟,2010:《波动率预测:GARCH模型与隐含波动率》,《数量经济与技术经济研究》,第1期,第140~150页。
- [4] 郑振龙、刘杨树,2010:《衍生产品定价:模型风险及其影响》,《金融研究》,第2期,第112~131页。
- [5] Black, F., and M. Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economics*, 81: 637~653.
- [6] Cont, R., and J. Fonseca, 2002, "Dynamics of Implied Volatility Surfaces", *Quantitative Finance*, 2: 45~60.
- [7] Cortazar, G., E. S. Schwartz, and L. Naranjo, 2004, "Term Structure Estimation in Low-Frequency Transaction Markets: A Kalman Filter Approach with Incomplete Panel-Data", *EFA 2004 Maastricht Meetings Paper No. 3102*.
- [8] Daglish, T., J. Hull, and W. Suo, 2007, "Volatility Surfaces: Theory, Rules of Thumb, and Empirical Evidence", *Quantitative Finance*, 7: 507~524.
- [9] Derman, E., 1999, "Regimes of Volatility: Some Observations on the Variation of S&P 500 Implied Volatilities", *Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes*.
- [10] Dumas, B., J. Fleming, and R. Whaley, 1998, "Implied Volatility Functions: Empirical Tests", *Journal of Finance*, 53: 2059~2106.
- [11] Durreleman, V., 2008, "Convergence of At-the-Money Implied Volatilities to the Spot Volatility", *Journal of Applied Probability*, 45: 542~550.
- [12] Goncalves, S., and M. Guidolin, 2006, "Predictable Dynamics in the S&P 500 Index Options Implied Volatility Surface", *The Journal of Business*, 79: 1591~1635.
- [13] Hafner, R., and B. Schmid, 2005, "A Factor-Based Stochastic Implied Volatility Model", *Working paper*, Risklab Germany GmbH.
- [14] Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, 1992, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a New Method-

<sup>①</sup> 郑振龙、刘杨树(2010)在他们的文章中对模型风险进行了详细的讨论。

- ology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, 60: 77 ~ 105.
- [15] Hull, J. , and W. Suo, 2002, "A Methodology for Assessing Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37: 297 ~ 318.
- [16] Ledoti, O. , P. Santa - Clara, and S. Yan, 2002, "Relative Pricing of Options with Stochastic Volatility", *Working Paper*.
- [17] Schonbucher, P. , 1999, "A Market Model for Stochastic Implied Volatility", *Mathematics of Finance*, 357: 2071 ~ 2092.

**Abstract:** This paper establishes a five-factor stochastic implied volatility surface model based on the data of Hang Seng Index of options market, and then firstly uses the extended Kalman Filter method for incomplete panel data to estimate the model parameters. The results show that in Hong Kong market, the extended Kalman Filter method is better than the traditional two-step method, and the five-factor stochastic implied volatility model does a much better job in capturing the dynamic behavior of the implied volatility surface than the determined or static implied volatility model.

**Key Words:** implied volatility surface, stochastic implied volatility, the extended Kalman filter.

(责任编辑:杨启庸)(校对:YY)